毛主席语录

自然科学是人们争取自由的一种武装。人们为着要在社会上得到自由，就要用社会科学来了解社会，改造社会进行社会革命。人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

《青年自学丛书》编辑说明

毛主席教导我们："**知识青年到农村去，接受贫下中农的再教育，很有必要。**"几年来，成千上万的知识青年，响应毛主席的伟大号召，满怀革命豪情，奔赴祖国的农村和边疆。他们认真读马、列的书，读毛主席的书，积极投入批林整风，朝气蓬勃地战斗在三大革命运动的第一线，坚定地走同工农相结合的道路，对建设社会主义新农村作出了贡献，阶级斗争和路线斗争的觉悟有了很大提高。无产阶级英雄人物不断涌现，一代革命青年正在茁壮成长。这是毛主席革命路线的伟大胜利。

按照毛主席关于"**要关怀青年一代的成长**"的教导，为了适应广大下乡上山知识青年自学的需要，特编辑、出版这套《青年自学丛书》。丛书以马列主义、毛泽东思想为指导，内容包括哲学、社会科学、自然科学的一些基本知识和鲁迅作品选。我们希望，这套丛书的出版，能对下乡上山知识青年的学习起积极作用，有助于他们进一步提高路线斗争觉悟、政治理论水平和文化科学水平，在又红又专的道路上阔步前进，更好地适应建设社会主义新农村和各项事业发展的需要。

我们对大力支持这套丛书的出版工作的有关单位和作者，表示衷心的感谢，并欢迎广大读者对这套丛书提出意见和批评，以便改进。

上海人民出版社

一九七三年四月

编 者 的 话

为了帮助广大知识青年学习初等数学知识，我们编写了《代数》与《几何》这两本书.

《代数》包括代数方程、指数、对数、三角函数等知识，同时也介绍了数列、排列组合、复数等内容.《几何》的前半部分介绍了三角形(包括边角计算)和圆，后半部分则属于平面解析几何的内容.

这两本书是互有联系的，必须配合使用．譬如，可以按照下面的顺序进行自学：先学习《代数》的前四章，再《几何》的前四章，然后《代数》的后五章，最后学习《几何》的后五章.

由于我们的思想水平不高，实践经验又不足，书中一定有许多缺点和错误，请读者批评指正.

《初等数学》编写组

1973年8月

目　录

第一章　几何的初步知识

第一节　几何的研究对象

一、形 的 概 念

恩格斯说："**和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。必须先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念。**"①

人们在生产实践中，接触到各种各样的物体．每种物体都有一定的形状，还有颜色、质料、硬度、重量等其他属性．所有这些属性，都需要分门别类地加以研究．当我们考察物体的形状，即其空间形式时，就把物体的其他属性暂时撇开，而只是把它们的形状拿来比较，概括其共性，从而得到反映物体空间形式的几何图形．譬如，不论是瓷杯、玻璃杯，还是塑料杯，它们的杯口都是圆形的；不论是木球，皮球，还是铅球，它们都是球形的．这里，圆和球都是几何图形．

几何学从空间关系出发，通过研究几何图形的内部规律性，解决实践中遇到的有关形的问题．

例如建造房屋时，要设计屋架的形状．许多屋架的形状如图 1-1 所示．下面一根梁叫做下弦杆，中间一根柱叫做中柱．在实践中常遇到这样的问题：

① 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社 1970 年版，第 35 页．

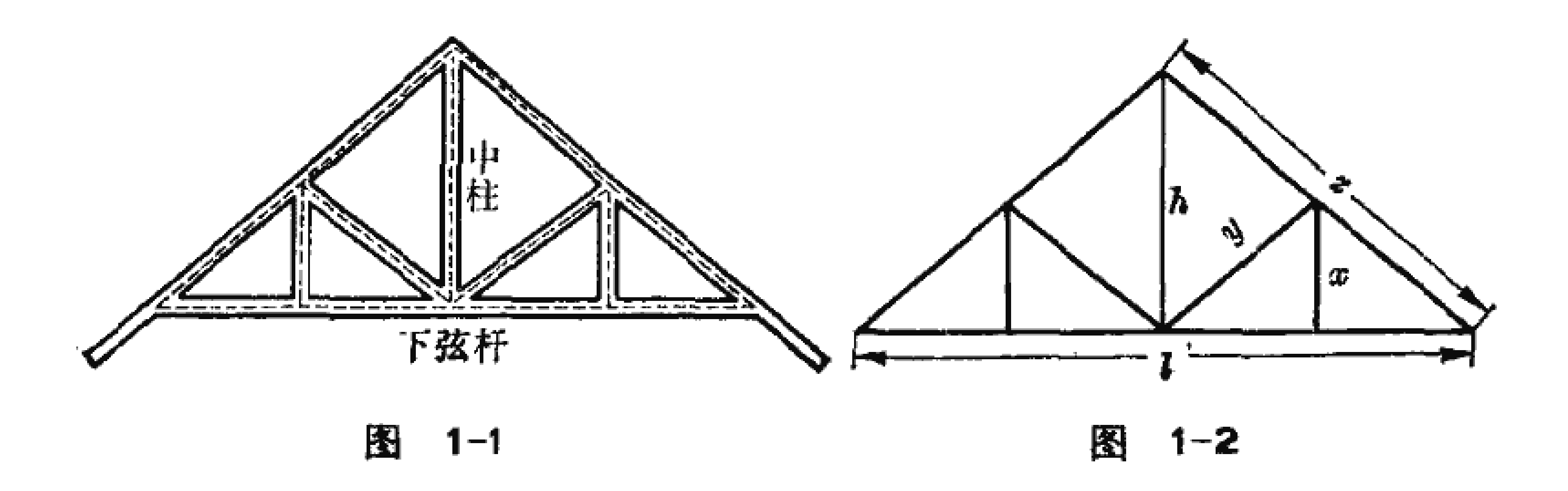


图 1-1　　图 1-2

已知下弦杆和中柱的长度，要求屋架中其他杆的长度．

为了研究的方便，我们用线段表示杆，从而把屋架的形状抽象成如图 1-2 所示的几何图形．这样，刚才提出的实际问题就转化为已知两线段长度 l 和 h，求另外三线段长度 x、y 和 z．

为了求 x、y 和 z，可以使用判断和推理的方法，来分析图 1-2 中各线段的内在联系，找出它们长度间的关系，然后利用这些关系算出 x、y 和 z．

求出 x、y 和 z 后，把这些结果用到实际中去，就解决了屋架设计的这个问题．

几何学的研究就是这样遵循"实践——理论——实践"的道路前进的．

二、常见的一些几何图形

下面介绍一些常见的简单的几何图形．

任何一个几何图形都是由面、线、点组成的，面、线、点叫做几何的基本元素．例如长方体，它的表面就是面，面与面相交的地方就是线，线与线相交的地方就是点（图 1-3）．

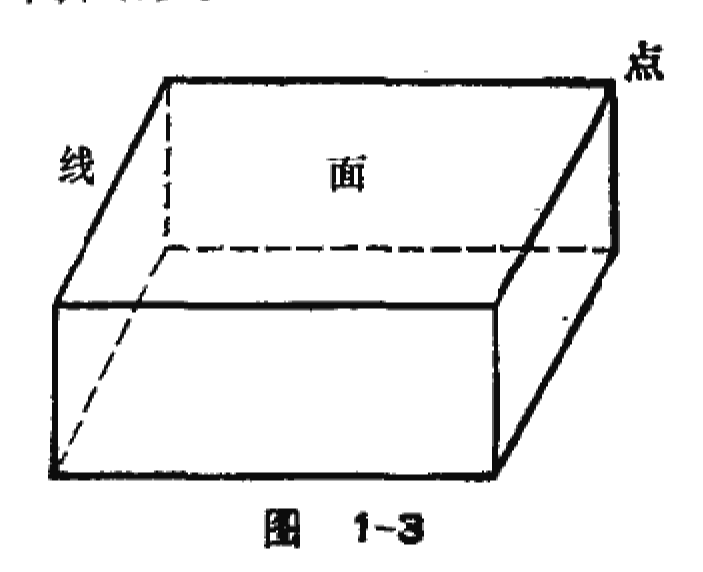


图 1-3

由这些基本元素构成的简单几何图形有直线、角、平行线、三角形和长方体等.

1. 直线

如长方体的边沿、书本的边沿、一段拉直的电线等等，它们都是有两个端点的线，这种线叫做线段.

把线段向一方无限延长就叫做射线，射线只有一个端点，例如探照灯发出的光线就是射线.

把线段向两方无限延长就叫做直线，直线是没有端点的. 人们通过实践认识到，过两点能够作也只能够作一条直线，也就是说，直线的位置由它上面任意两点的位置所确定，即两点决定一直线.

对于线段，我们把它的端点用两个大写字母例如 A、B 表示，并把这条线段记作 AB，或用一个小写字母 l 表示（图1-4）.

图 1-4

图 1-5

对于射线，如把它的一个端点记作 A，再在射线上任意取一点 X，则这条射线可记作 AX（图1-5）.

对于直线，可在其上任意取两点 M、N，记这直线为 MN（图1-6）.

长度单位

1厘米

图 1-6

图 1-7

因为线段有两个端点，它是界于两个端点间的部分，所以它有一定的长度. 要度量一条线段的长度，需要选定一种长

度单位. 比如选1厘米做长度单位,用它去度量线段 AB, 如果刚好是1厘米的4倍,那么这条线段 AB 就有4厘米长(图1-7).

2. 角

角是简单的直线图形, 图1-2中屋架的各根杆之间都形成了角. 又如时钟的长、短针之间也形成了角.

一般地, 从一点引出两条射线所组成的图形就是角. 引出射线的点叫做角的顶点,两条射线叫做角的边. 如图1-8, 角由射线 OA 和 OB 组成, O 点是角的顶点, 这个角记为 $\angle AOB$ 或 $\angle BOA$,读作"角 AOB"或"角 BOA". 在不会与其他角混淆的情况下, 可简记为 $\angle O$. 有时,为了方便起见,在角里注上数字或小写希腊字母,如图1-9中所示的角,可分别记作 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle \alpha$, $\angle \beta$.

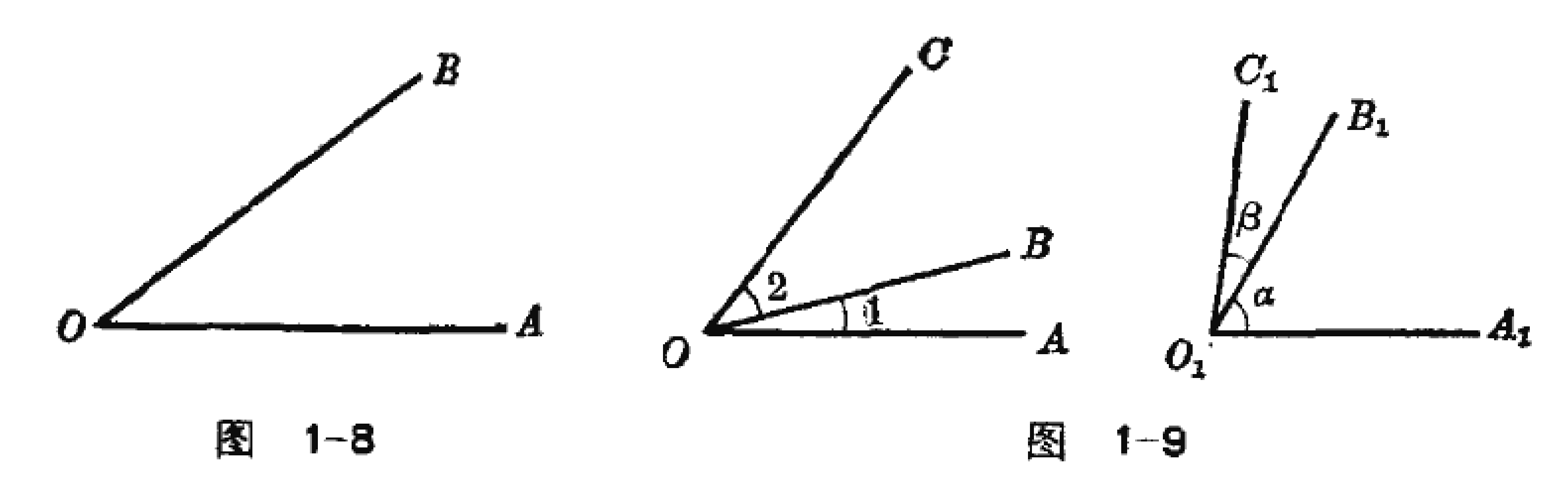


图 1-8　　图 1-9

角也可以看成由一条射线绕它的端点旋转而得到. 如图1-10中,一条射线绕着端点 O, 从 OA 位置转到 OB 位置, 形成了角 $\angle AOB$.

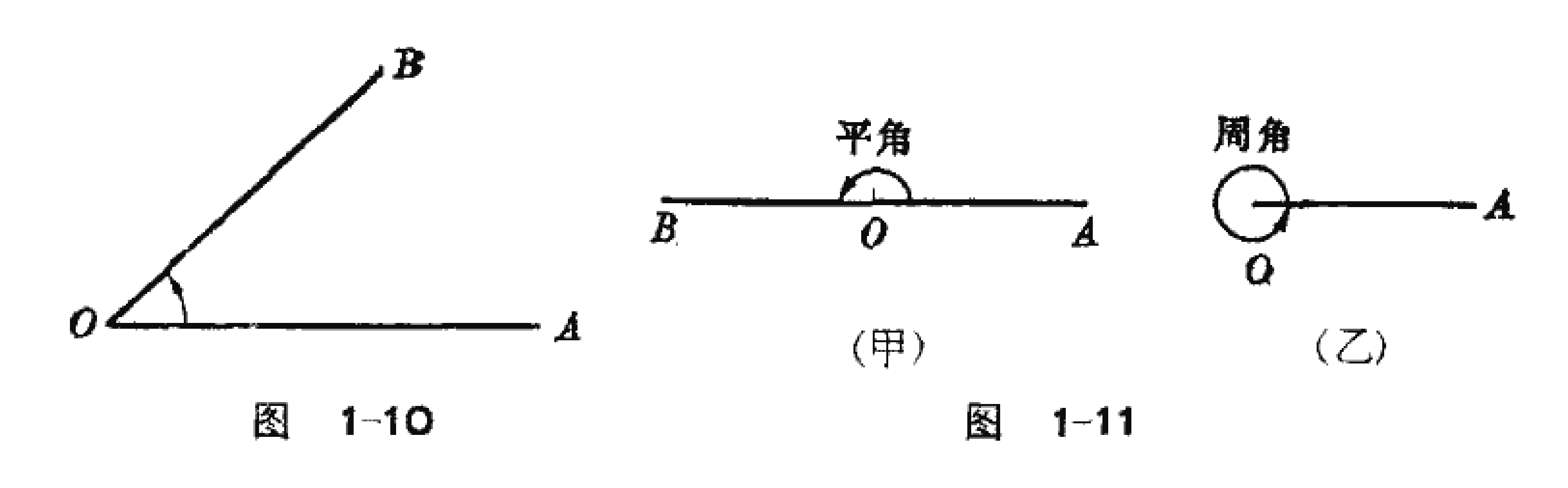


图 1-10　　图 1-11

特别，若射线 OA 绕端点 O 旋转到 OB，当 OA、OB 形成反向射线时（图 1-11（甲）），$\angle AOB$ 叫做平角；继续转下去，使 OB 回到原来位置 OA（图 1-11（乙）），形成的角叫做周角.

度量一个角的大小与度量一条线段的长短一样，需要选择一个度量单位. 把一个周角分成 360 等分，这周角的 $\frac{1}{360}$ 我们称为 1 度，记为 1°；把 1° 分成 60 等分，这 1° 角的 $\frac{1}{60}$ 称为 1 分，记为 $1'$；把 $1'$ 分成 60 等分，这 $1'$ 角的 $\frac{1}{60}$ 称为 1 秒，记为 $1''$. 如 24 度 13 分 6 秒可记为 $24^\circ 13' 6''$.

这样，周角就等于 360°；平角是周角的一半，等于 180°.

通常，我们是用量角器来度量角的大小的. 如图 1-12，把量角器上的圆心和角的顶点重合，并使量角器上 0° 的刻线对准角的一边. 这时，角的另一条边在量角器上所对的读数，就是这个角的度数. 如图 1-12 中，$\angle AOB = 50^\circ$.

我们把平角的一半也就是 90° 的角叫做直角，把小于 90° 的角叫做锐角，大于 90° 而小于 180° 的角叫做钝角.

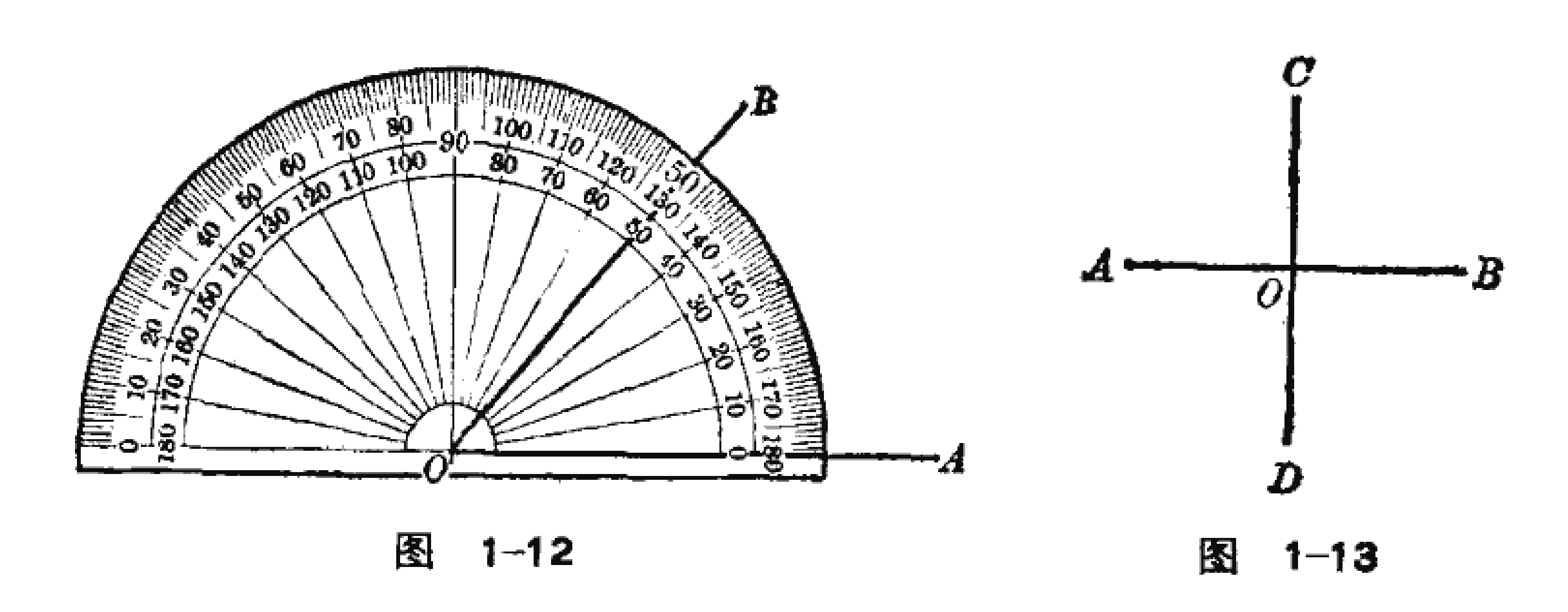


图 1-12　　　　图 1-13

形成直角的两边叫做互相垂直. 一般地说，当两条直线夹成直角时，这两条直线的位置关系叫做互相垂直，其中一条叫另一条的垂线，交点叫垂足. 如图 1-13 中，AB 与 CD 垂

直，就记为 $AB\perp CD$ 或 $CD\perp AB$. 记号"⊥"读作"垂直于". 建筑施工中定出的水平线与铅直线，机械加工中在工件上划出的十字线，都是互相垂直的直线，因而形成的角都是直角.

如果两只角的和等于 $90°$，就称这两只角互为余角. 如图 1-14 中 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互为余角. 如果两只角的和等于 $180°$，就称这两只角互为补角. 如图 1-15 中的 $\angle\alpha$ 和 $\angle\beta$ 互为补角. 例如，$52°10'$ 的余角为 $90°-52°10'=37°50'$，而补角为 $180°-52°10'=127°50'$.

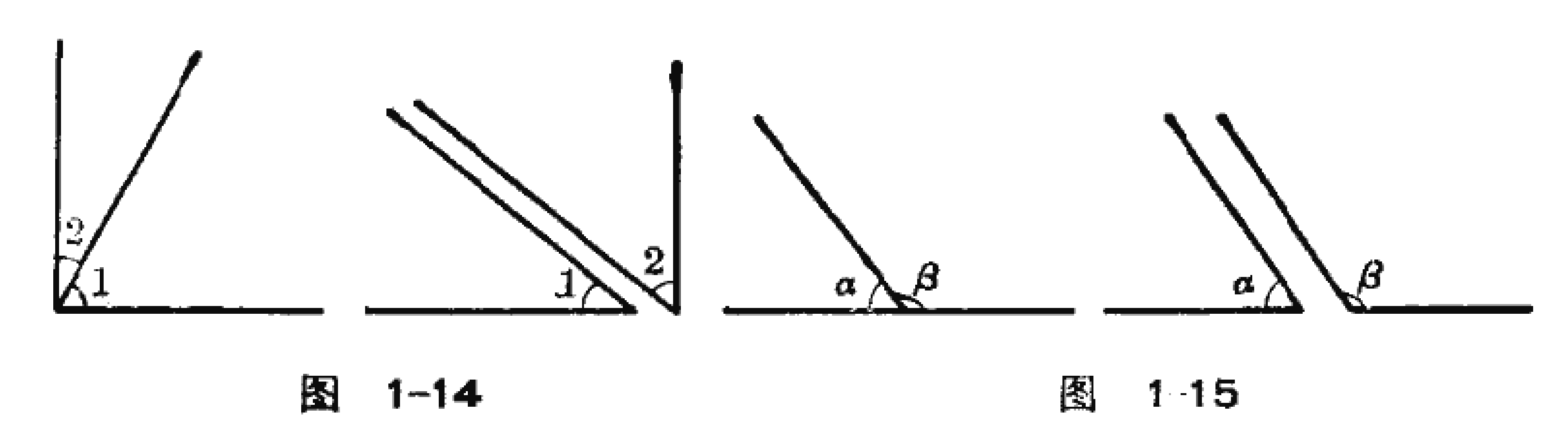


图 1-14　　　　图 1-15

如果两条直线相交，它们形成四个角 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ (图 1-16)，我们把其中的 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 叫做对顶角，同样 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 也是对顶角.

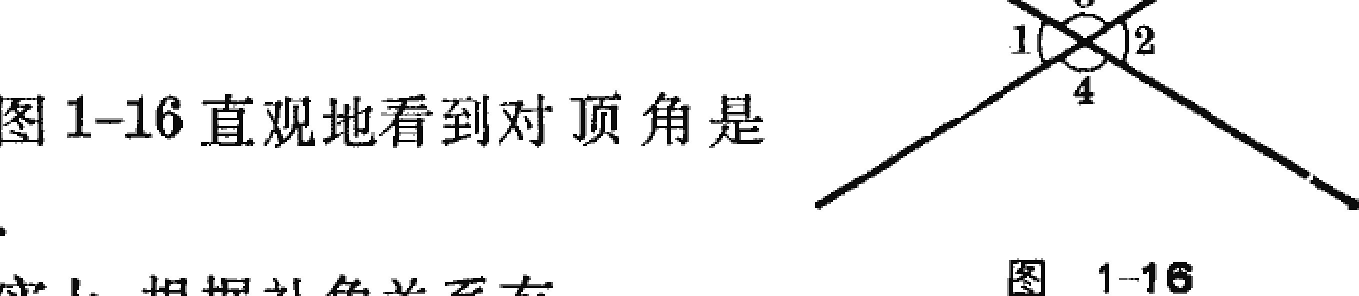


图 1-16

从图 1-16 直观地看到对顶角是相等的.

事实上，根据补角关系有

$$\angle 1=180°-\angle 3, \qquad \angle 2=180°-\angle 3,$$

可知 $\angle 1$, $\angle 2$ 都等于 $180°-\angle 3$，所以 $\angle 1=\angle 2$.

因此得到：凡对顶角都相等.

几何中把通过实践总结出来或经过推理得到的图形的基本性质，通常叫做定理，象上面说的"凡对顶角都相等"就是一条定理.

3. 平行线

铁路上的两条笔直的铁轨，门的两条对边，都可以想象为无论怎样延长也不会相交的直线. 在几何中，把同一平面内不相交的两条直线叫做平行线. 若直线 AB 平行于 CD，就记为 $AB \parallel CD$.

劳动人民在长期实践中，不断总结经验，创造了许多画平行线的方法. 例如，把扳成一定角度的活络角尺贴紧木板一边，从一个位置移到另一个位置，就能划出一条条平行的直线（图 1-17）. 这种画法的特点，是活络角尺的角度始终不变，即 $\angle 1=\angle 2$. 由此可见，画出的直线 l_1、l_2 所以会平行，是与角度 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的相等分不开的.

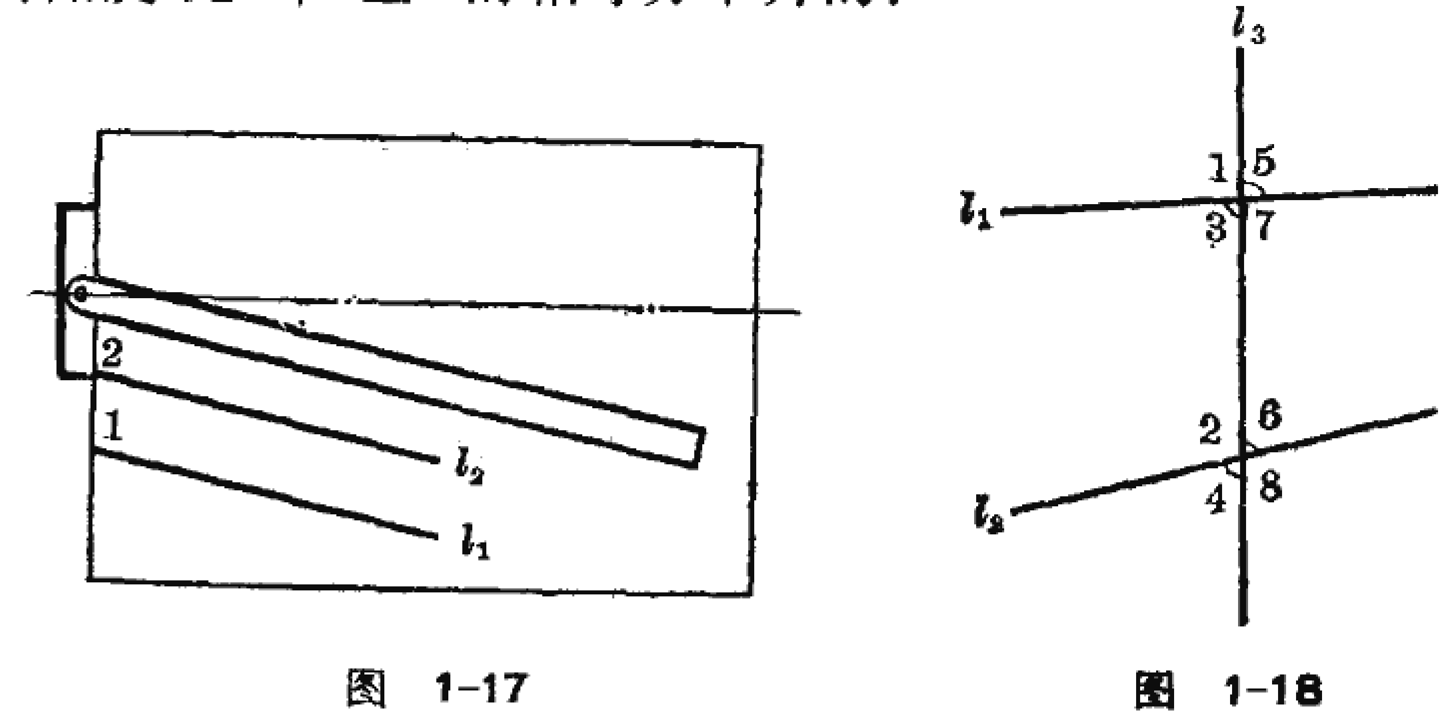


图 1-17　　图 1-18

一般地，两直线 l_1、l_2 被第三条直线所截，构成八只角（图 1-18）. 我们称 $\angle 1$ 和 $\angle 2$，$\angle 3$ 和 $\angle 4$，$\angle 5$ 和 $\angle 6$，$\angle 7$ 和 $\angle 8$ 为同位角；$\angle 2$ 和 $\angle 7$，$\angle 3$ 和 $\angle 6$ 为内错角.

用活络角尺画平行线的事实告诉我们，两直线被第三条直线所截，如果同位角相等，这两条直线就一定平行. 我们把这条判定两直线平行的重要方法简单叙述为

定理　同位角相等，则两直线平行.

反过来，如果两条平行直线被第三条直线所截，同位角一

定相等．我们也可以简单叙述为

定理 两直线平行，则同位角相等．

上述定理中的同位角还可以换为内错角．在图 1-18 中，根据对顶角相等的定理，$\angle 1=\angle 7$．于是，由 $\angle 1=\angle 2$ 可推知 $\angle 7=\angle 2$．因此，可以建立反映平行线与内错角之间联系的两个定理．

定理 内错角相等，则两直线平行．

定理 两直线平行，则内错角相等．

4．三角形

三角形是研究一般几何图形的基础，实际应用也最广泛．

三角形也叫三边形，它有三条边和三个角，三条边两两相交，它们的交点叫做三角形的顶点．每一顶点用一大写字母表示，如图 1-19 中这个三角形可记为 $\triangle ABC$，读作“三角形 ABC”．其中 $\angle A$ 对的边是 BC，就称 $\angle A$ 是 BC 的对角，或称 BC 是 $\angle A$ 的对边．

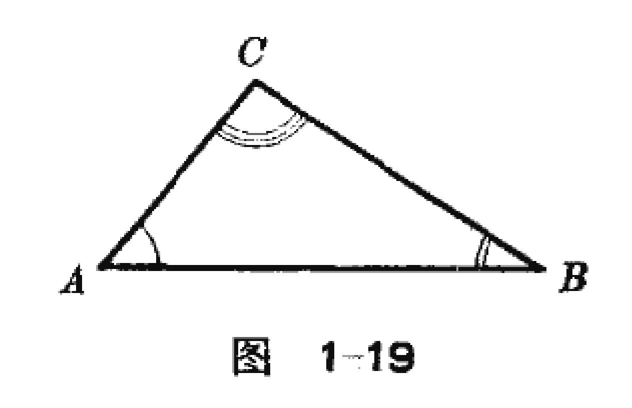


图 1-19

三角形中任意两边的和一定大于第三边，否则就不能构成三角形、又三角形的三只角的和等于 180°（理由将在第二章中介绍）．

三角形除了以上最基本的性质外，它的面积的计算也是经常要用到的．

为了寻求三角形面积的计算公式，我们从计算正方形和长方形（又称矩形）的面积着手．

我们知道，正方形的四边都相等，长方形的对边相等而长与宽是不相等的，它们的每一只角都是直角，图 1-20（甲）是正方形 $ABCD$，（乙）是长方形 $ABCD$．要度量正方形和长

方形的面积，首先要给出一个作为标准的面积单位．例如，选边长为1厘米的正方形作为面积单位，就记这个面积单位为1厘米^2，读做“1平方厘米”．

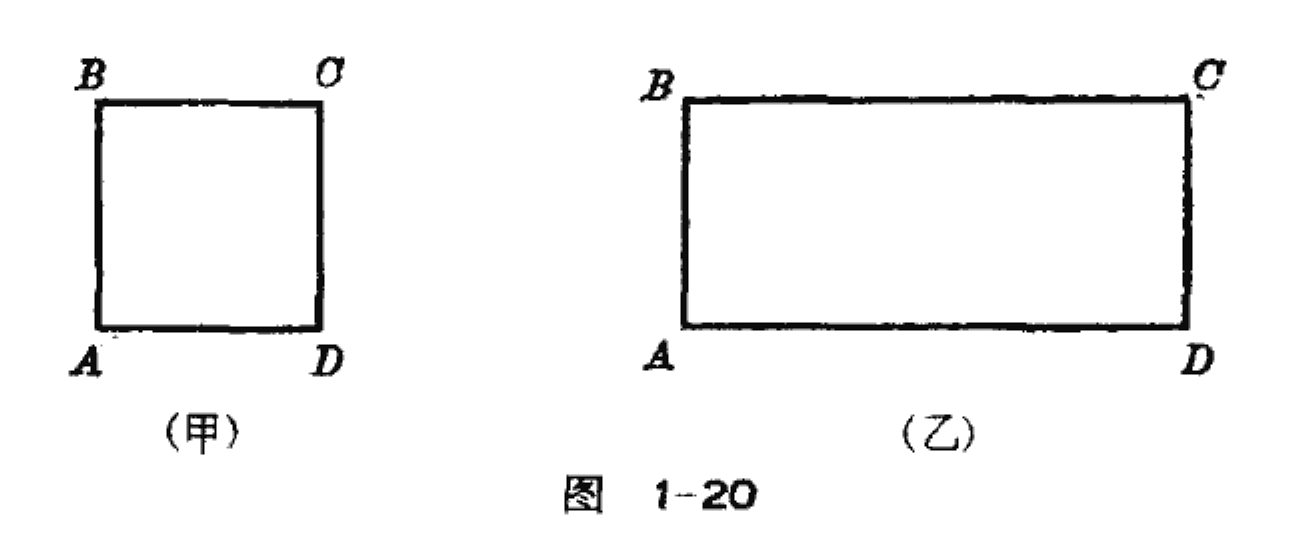


图 1-20

在图1-21中，(甲)是一个正方形，它的边长为3厘米，这个正方形的大小正好是面积单位的$3\times3=9$倍，所以该正方形的面积是9厘米^2；图1-21（乙）是一个长方形，长为4厘米，宽为2厘米，这个长方形的大小是面积单位的$2\times4=8$倍，所以该长方形的面积为8厘米^2．

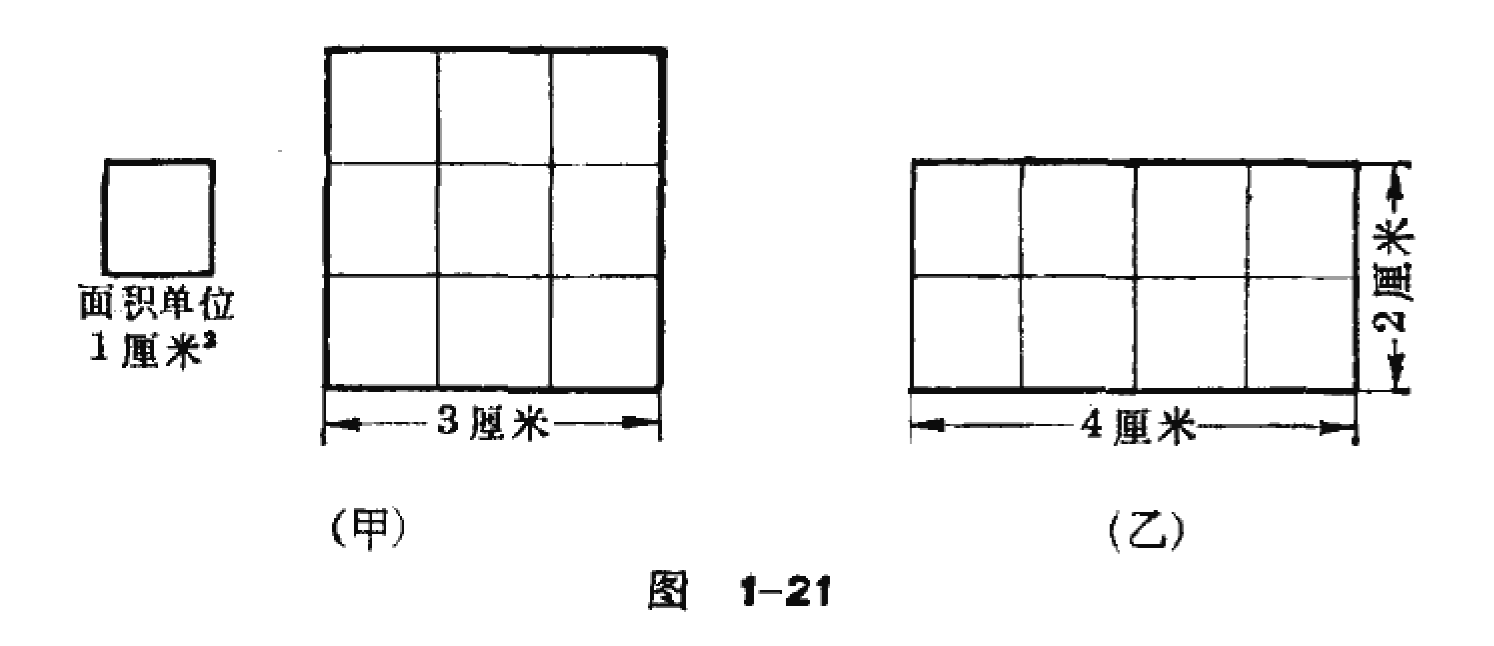


图 1-21

一般，正方形和长方形的面积计算公式分别为

$$正方形面积=边长的平方，$$

$$长方形面积=长\times宽．$$

三角形的面积如何计算呢？

我们先讲直角三角形面积的计算方法. 有一只角是直角的三角形叫做直角三角形. 夹直角的两条边叫做直角边. 取两个形状相同、大小相等的直角三角形 ABC 和 ACD 拼成如图 1-22 中的长方形 $ABCD$.

由于长方形 $ABCD$ 的面积等于 AB 与 BC 的乘积，而 $\triangle ABC$ 的面积是长方形 $ABCD$ 面积的一半，因而

$$\triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2}(AB \times BC).$$

也就是说，直角三角形的面积等于两直角边乘积的一半.

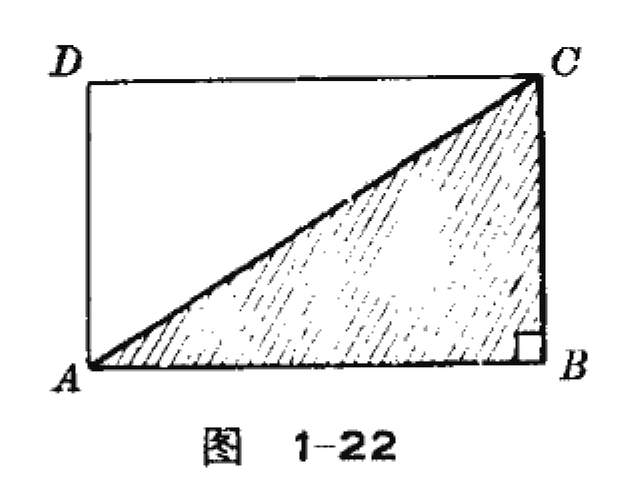


图 1-22

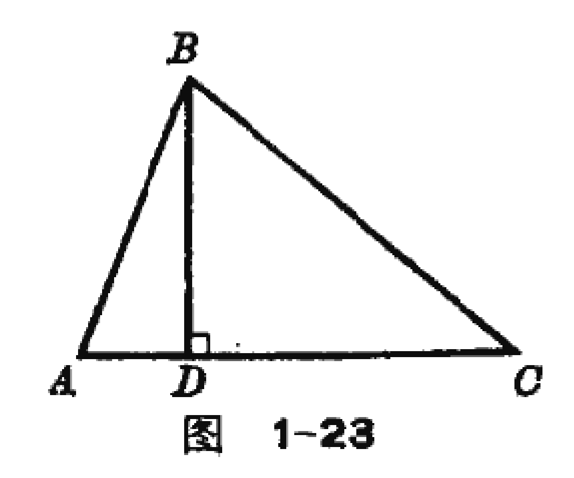


图 1-23

对于一般的三角形，可以把它分成两个直角三角形（图 1-23），于是

$$\begin{aligned}
&\triangle ABC \text{ 的面积} \\
&= \triangle ADB \text{ 的面积} + \triangle BDC \text{ 的面积} \\
&= \frac{1}{2}(AD \times BD) + \frac{1}{2}(DC \times BD) \\
&= \frac{1}{2}(AD + DC) \times BD = \frac{1}{2}(AC \times BD).
\end{aligned}$$

从三角形的顶点向对边作垂线，顶点到垂足的距离叫做三角形在这条边上的高，相应地那条边叫做三角形的底. 于是，三角形面积计算公式可写为

$$\text{三角形的面积} = \frac{1}{2}(\text{底} \times \text{高}).$$

5．圆

圆是常见的曲线图形．如果要在平面上画一个圆，可以把圆规的一只脚固定在某点 O，另一只脚绕它旋转一周，就画出一个位置和大小完全确定的圆．从画圆的过程可以看出，圆上每一点到定点 O 的距离都相等，这个距离 r 就是圆的半径，而 O 是圆心(图 1-24)．这就是说，固定了圆心，决定了半径的长度，圆就完全确定了，所以，圆心决定圆的位置，半径决定圆的大小．

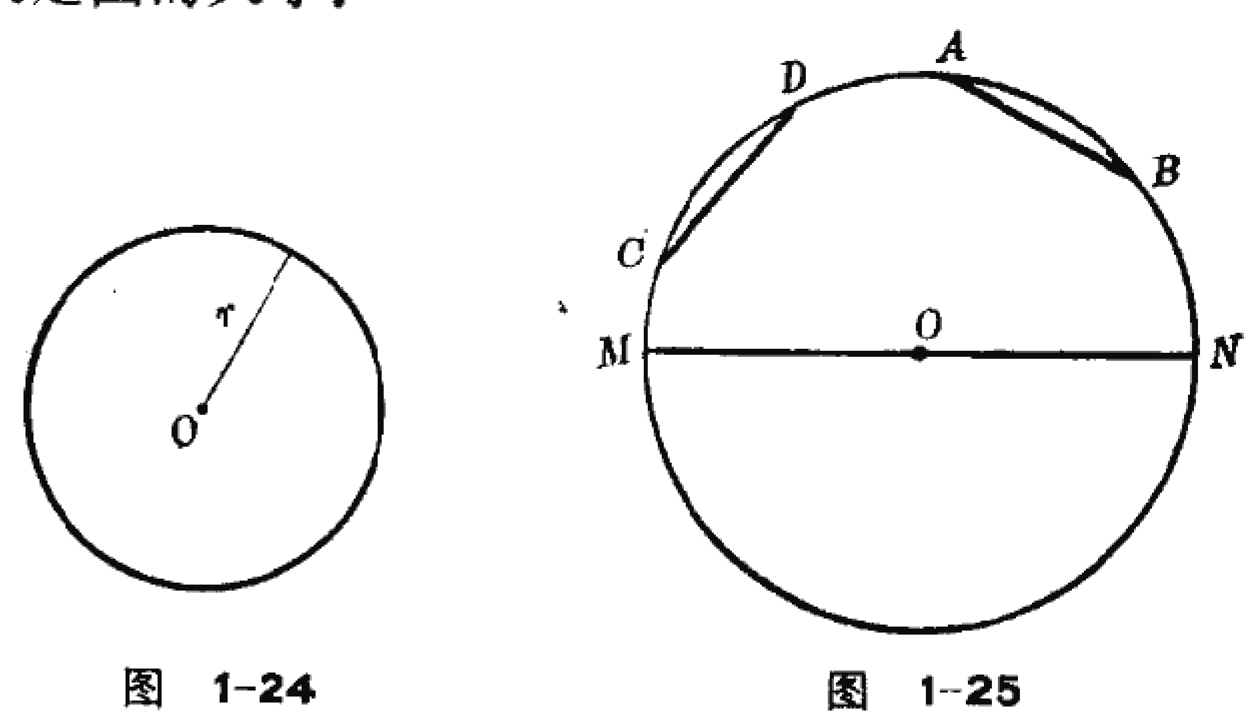


图 1-24　　图 1-25

圆上任意两点之间的部分叫做圆弧，简称弧．如图 1-25 的 AB 弧，可记作 $\overset{\frown}{AB}$．

连接弧的两个端点的线段叫做弦，过圆心的弦叫做直径．在图 1-25 中，AB 是弦，MN 是直径．显然，直径等于半径的两倍．

在同圆内，两段相等的弧所对的弦也相等．反过来，等弦所对的弧也相等．如在图 1-25 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，则 $AB=CD$，反之，若 $AB=CD$，则 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$．

工件轮廓线中转弯部分常常用圆弧连接，如图 1-26．

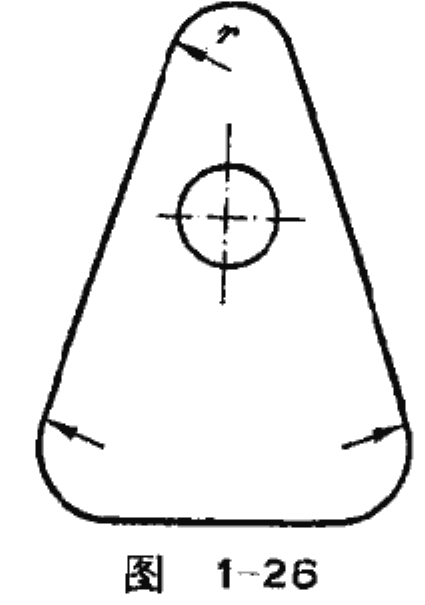


图 1-26

6．长方体

长方体是由六个两两平行的长方形的面围成的立体图形，六个面的交线形成十二根线段，这些线段的长度分三组，每组四根，各自相等，所以只要给出三个长度 a、b、c（图1-27），长方体的大小就完全决定了．这三个长度称为长方体的长、宽、高．

当长、宽、高这三个长度都相等时，长方体便是一个正方体．

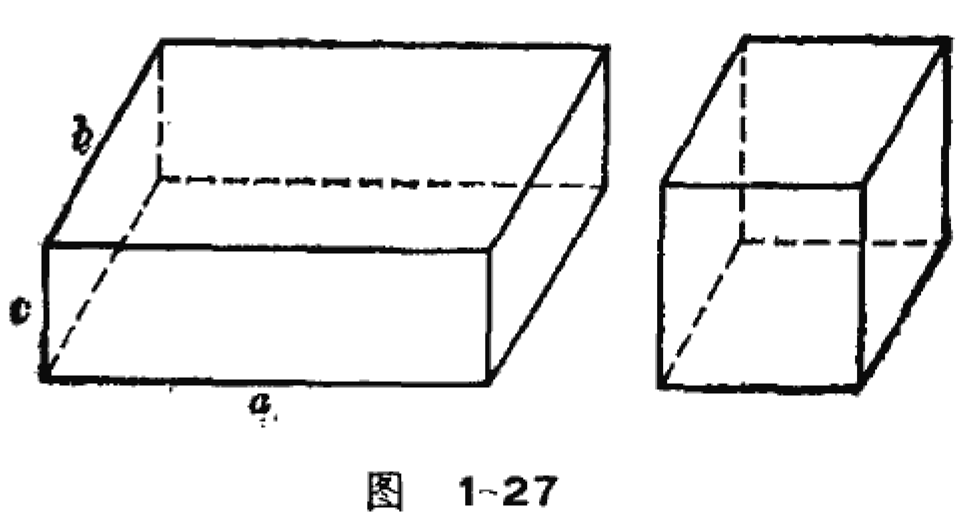


图 1-27

长方体的表面积，是指围成它的六个长方形的面积的和，容易计算出表面积

$$S=2(ab+bc+ca).$$

下面讨论长方体的体积．若选边长为1厘米的正方体作为体积单位，就记这个体积单位为1厘米³，读作“1立方厘米”．

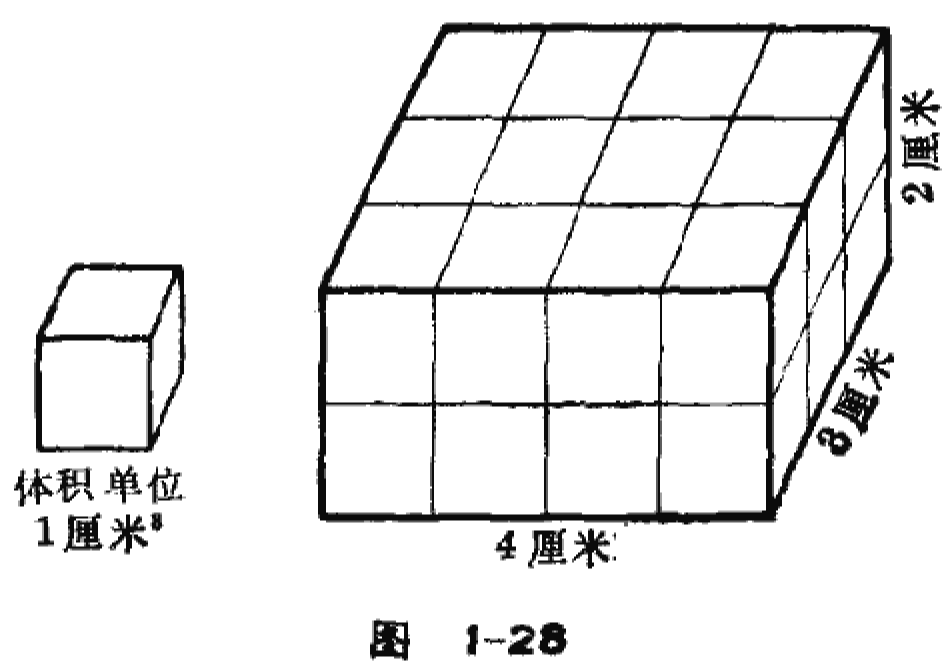


图 1-28

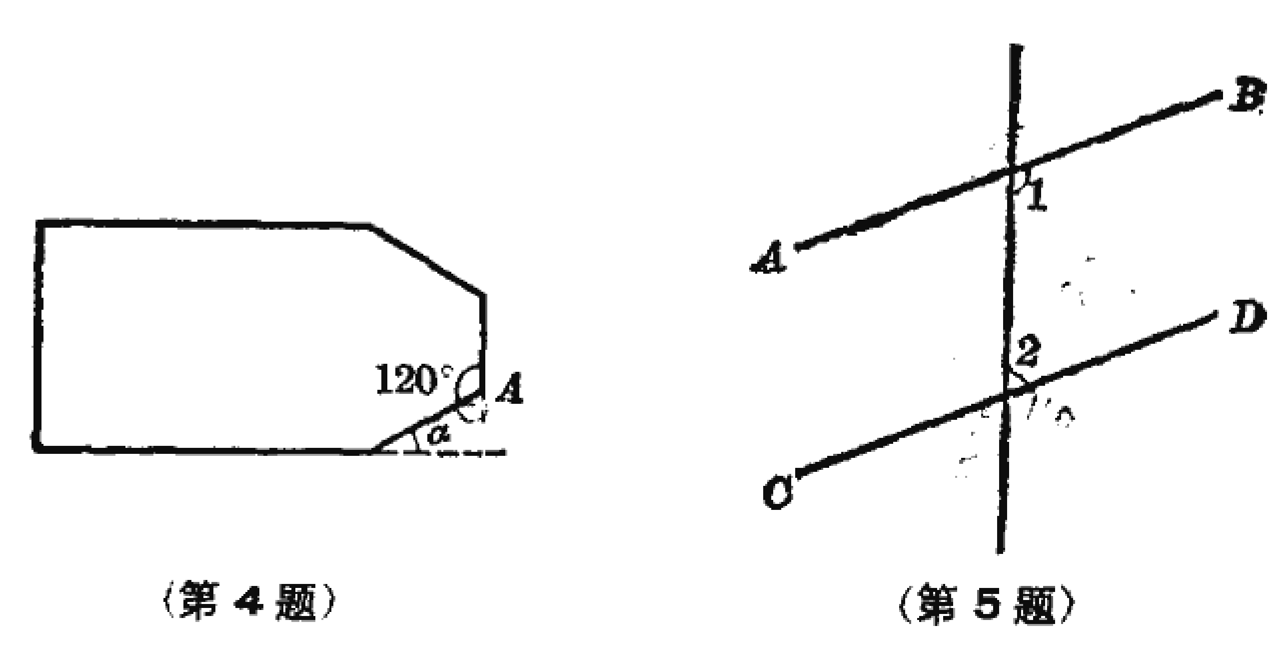
图 1-28 右方是一个长、宽、高分别为 4 厘米、3 厘米、2 厘米的长方体，其大小恰好是体积单位的 $4\times3\times2=24$ 倍，所以记这个长方体的体积为 24 厘米^3.

一般，长方体的体积计算公式为

$$\text{长方体体积}=\text{长}\times\text{宽}\times\text{高}.$$

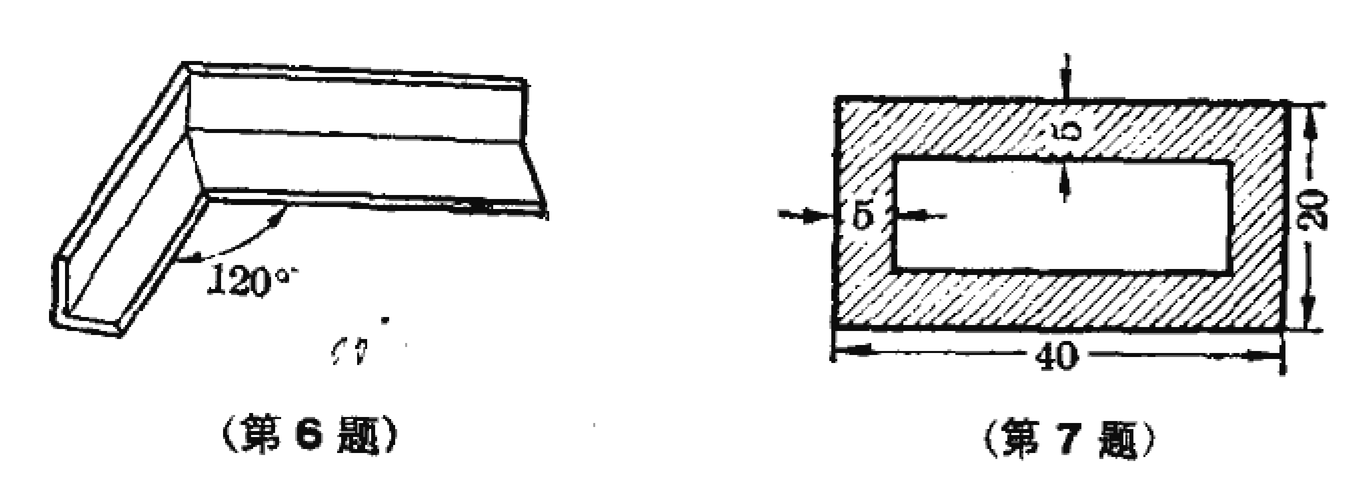
习　题

1. 计算下列的值：
   (1) $10°55'+20°45'$;　　(2) $25°-15°48'$;
   (3) $15°20''-10°40''$;　　(4) $5.25°-300''$.
2. 时钟在 1 时、2 时、4 时、5 时，时针和分针构成多少度角，并指出这四个角度间有否互余或互补的关系.
3. 怎样用三角板和直尺推平行线？为什么？
4. 在锥形工件断面图中，已知 $\angle A=120°$，求 $\angle\alpha$.



(第 4 题)　　(第 5 题)

5. 若图中 $\angle1=110°$，$AB\parallel CD$，求 $\angle2$.
6. 钳工要把角钢弯成 120° 的钢架，截去的缺口是几度？



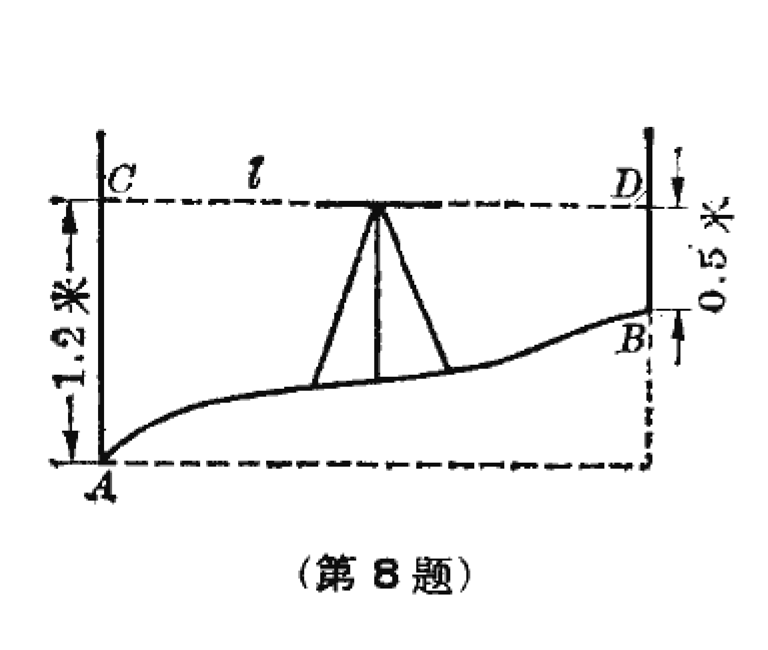
(第 6 题)　　(第 7 题)

7. 某零件的断面如图，内外壁都是长方形. 已知外壁长 40 毫米，宽 20 毫米，壁厚为 5 毫米，求内壁的长和宽.

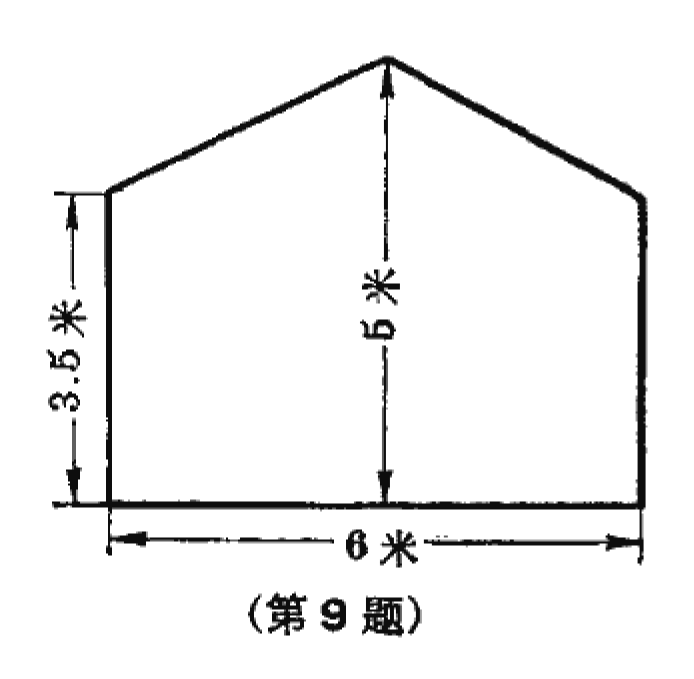
8. 某生产队由 A 点向 B 点修渠引水(见图)，水的流动由地面高低变化决定. 故有必要测量 A、B 两点的高低. 现用水准仪定出水平视线 l，在 A、B 处水准尺上测得高度依次为

$$AC=1.2 \text{ 米}, \quad BD=0.5 \text{ 米},$$

怎样求出 B 点与 A 点的高度差，为什么？



(第 8 题)



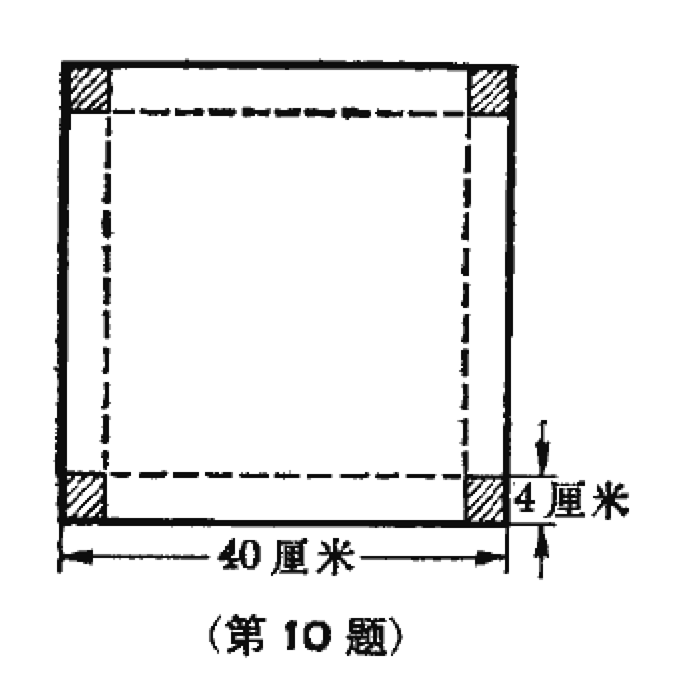
(第 9 题)

9. 某生产队仓库一侧的墙面如图所示，

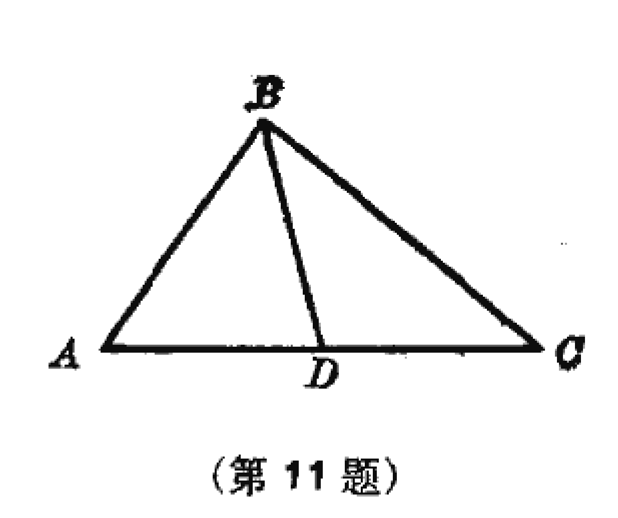
(1) 求墙面的面积；

(2) 若每平方米需砌砖 110 块，砌这个墙需用砖多少块？

10. 在一块边长是 40 厘米的正方形铁皮的四角，各剪去一块边长为 4 厘米的小正方形，然后弯折起来做成一个盒子，求盒子的表面积和容积.



(第 10 题)



(第 11 题)

11. 若图中，$AD=DC$，说明 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BDC$ 的面积相等.

第二节 几何中的推理论证

一、推 理 方 法

毛主席教导我们："**要完全地反映整个的事物，反映事物的本质，反映事物的内部规律性，就必须经过思考作用，将丰富的感觉材料加以去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的改造制作工夫，造成概念和理论的系统，就必须从感性认识跃进到理性认识。**"对几何图形的认识，也有一个从感性上升到理性的过程．几何中运用的逻辑推理方法，也正是在这个过程中形成的．我们常常在从特殊上升到一般、由简单深入到复杂、利用已有结果探寻新的结果等场合运用这种推理方法，以掌握图形内部规律性．恩格斯说："**初等数学，即常数的数学，是在形式逻辑的范围内活动的，至少总的说来是这样**"．① 因此，在学习几何的过程中，掌握一定的逻辑推理能力，是必要的．

学习逻辑推理，先要分清证题中已知的"条件"是什么，待证的"结论"是什么，然后从条件出发应用已经掌握的图形性质，一步一步地推导出正确的结论来．比如前面讲的"凡对顶角都相等"这条定理，已知条件是两只角为对顶角，要证的结论是这两只角相等．我们是根据补角的概念以及等式关系推导出对顶角相等这条结论的．又如"内错角相等，则两直线平行"这条定理，已知条件是两直线被第三条直线所截，内错角相等，结论是这两条直线平行，这是根据"凡对顶角都相等"以及"同位角相等，则两直线平行"这两点性质推导出来的．

分清了证题的"条件"和"结论"，结合图形，可以把"条件"

① 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社1970年版，第132页．

写为"已知"，"结论"写为"求证"，然后把推证的步骤写成"证明"．例如，对于定理"凡对顶角都相等"，按图 1-29 所示，可写为

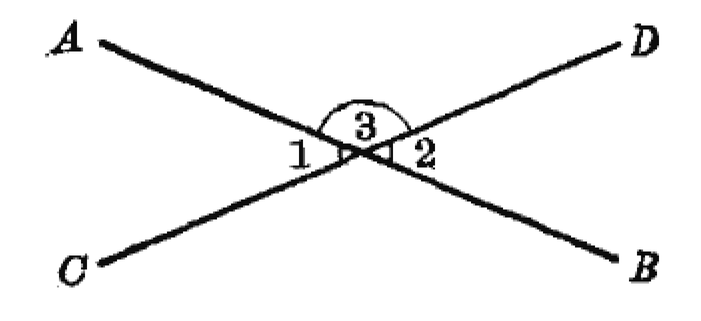


图 1-29

已知 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 为对顶角．

求证 $\angle 1=\angle 2$．

证明 $\because$ $\angle 1+\angle 3=180^\circ$，

$\therefore$ $\angle 1=180^\circ-\angle 3$（$\angle 1$，$\angle 3$ 互为补角）；

$\because$ $\angle 2+\angle 3=180^\circ$，

$\therefore$ $\angle 2=180^\circ-\angle 3$（$\angle 2$，$\angle 3$ 互为补角），

$\angle 1=\angle 2$（$\angle 1$，$\angle 2$ 都等于 $180^\circ-\angle 3$）．

对于定理"内错角相等，则两直线平行"，结合图 1-30，可写为

已知 $\angle 1=\angle 2$．

求证 $AB \parallel CD$．

证明 $\angle 1=\angle 2$（已知内错角相等），

$\angle 2=\angle 3$（对顶角相等），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$（$\angle 1$，$\angle 3$ 都等于 $\angle 2$），

$AB \parallel CD$（同位角相等，则两直线平行）．

在着手证明之前，往往先要对证明的过程进行分析，因为证明的目的是从已知条件推断出求证结论，分析就从这两者的联系着手．例如要证明"内错角相等，则两直线平行"时，我们已经知道"同位角相等，则两直线平行"，因此必须从已知 $\angle 1=\angle 2$ 出发，找出两直线 AB 和 CD 的一对同位角相等，才能说明结论 $AB \parallel CD$ 成立．从图 1-30 可见，因对顶角相等，$\angle 2=\angle 3$，于是就得到相等的同位角 $\angle 1=\angle 3$，这样就建立了已知部分和求证部分的联系，我们就是按这个思路写出证明的步骤的．在证明过程中每一步骤都必须有充分的理由．

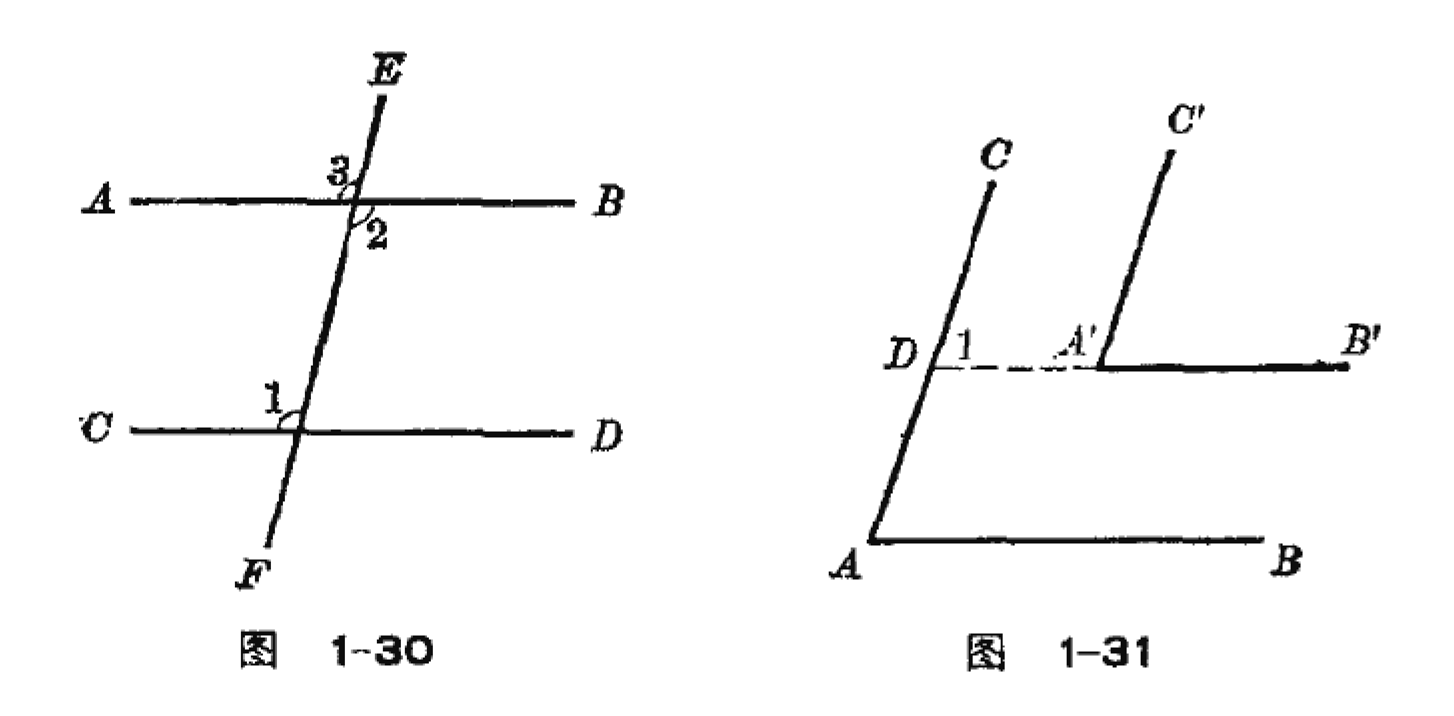


图 1-30　　图 1-31

再看下面一个例子. 在图 1-31 中,

已知　$AB \parallel A'B'$,　$AC \parallel A'C'$.

求证　$\angle A=\angle C'A'B'$.

分析　已知条件是平行线, 求证结论是角相等. 根据已有几何知识, 平行线与角可通过内错角或同位角联系起来. 于是, 我们想到要作 $B'A'$ 的延长线 $A'D$, 这样, $\angle C'A'B'$ 与 $\angle 1$, $\angle A$ 与 $\angle 1$ 都是同位角. 再由"两直线平行, 则同位角相等", 知 $\angle C'A'B'$ 与 $\angle A$ 都等于 $\angle 1$, 从而 $\angle A=\angle C'A'B'$.

证明　延长 $B'A'$, 则交 AC 于 D,

$\because$　$\angle C'A'B'=\angle 1$ (两直线平行, 则同位角相等),

$\angle A=\angle 1$ (同上),

$\therefore$　$\angle A=\angle C'A'B'$ (两只角都等于 $\angle 1$).

在"证明"部分, 要求每一步都有充分的理由. 这种理由, 可以是学过的几何知识如概念、性质、定理, 也可以是一些显而易见的理由. 初学时, 要求大家尽可能注明理由.

今后, 为了书写的方便, 我们约定把下述与等式有关的理由, 如

(1) 等式变形;

(2) 如果 $a=b$, $c=b$, 那末 $a=c$;

(3) 如果 $a=b$, $c=d$, 那末 $a\pm c=b\pm d$,
等等,都简写为"等量关系".

在熟悉了这种推理方法之后,我们就不一定再按照固定的格式书写,只要从证题的条件出发,合理地推断出求证的结论即可.

二、理论和实践的统一

毛主席教导我们:**"一切真知都是从直接经验发源的。"**从几何学的形成和发展来看,人们首先通过测量、观察、实验等方法,取得处理几何问题的直接经验,进一步总结这些经验,包括运用推理方法,将丰富的感觉材料加以整理和改造,并经过实践的检验,得到人们对几何知识的比较系统的认识.

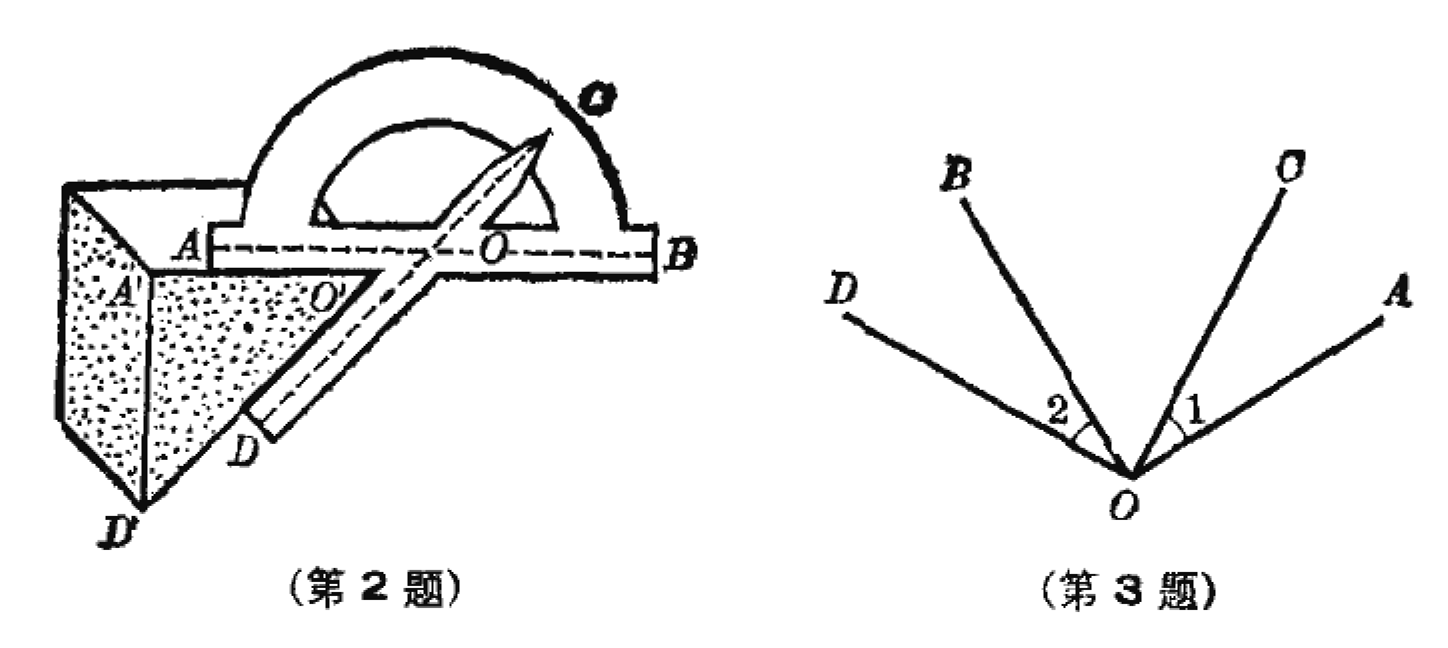
但是,唯心论的先验论者不是这样,他们认为纯数学产生于纯思维.在他们看来,只要在头脑里规定几条数学原则,就能用推理方法导出全部几何知识,并可运用于实践.这种说法,完全歪曲了几何学发展的历史,割断了几何学与实践的联系,抹杀了劳动人民创造几何学的作用.他们在竭力夸大几何中形式逻辑作用的同时,甚至公开宣扬"数学的价值在于能够训练思维,因此必须不是为了应用,而是为了它的知识而去学它".这样,就进一步赤裸裸地暴露了他们鼓吹"理论至上",反对理论联系实际的真面目.他们妄图把一个与社会实践紧密联系的生动活泼的几何学,变成从概念到概念、从定理到定理的数学游戏.我们必须深入批判他们在数学领域中散布的唯心主义和形而上学观点,用辩证唯物论指导我们的学习.毛主席教导我们:**"最重要的,是善于将这些知识应用到生活和实际中去。"**我们必须根据三大革命实践的需要,在学习过程中努力培养分析问题和解决问题的能力,坚决反对理

论脱离实际的错误倾向.

割断几何与实践的联系,片面强调推理论证,夸大它的作用,处处追求所谓"严密论证",那当然是错误的. 但是,我们并不否定学习推理论证的重要性. 在几何学从实践产生又服务于实践的过程中,推理方法确实在理性认识阶段发挥了作用. 当我们把实际问题归结为一个几何问题后,也常常利用推理方法研究几何图形. 恩格斯曾指出:"**甚至形式逻辑也首先是探寻新结果的方法,由已知进到未知的方法**".[①]因此,结合几何学内容,学习和掌握推理方法还是必要的.

习 题

1. 写出下列证题的"已知"和"求证":
   (1) 锐角的补角是钝角;
   (2) 如果两直线都垂直于第三条直线,那末这两条直线平行;
   (3) 直角三角形的两只锐角互为余角.
2. 用对顶量角器度量工件角度时,为什么读出 $\angle COB$ 的度数,就是 $\angle A'O'D'$ 的度数?



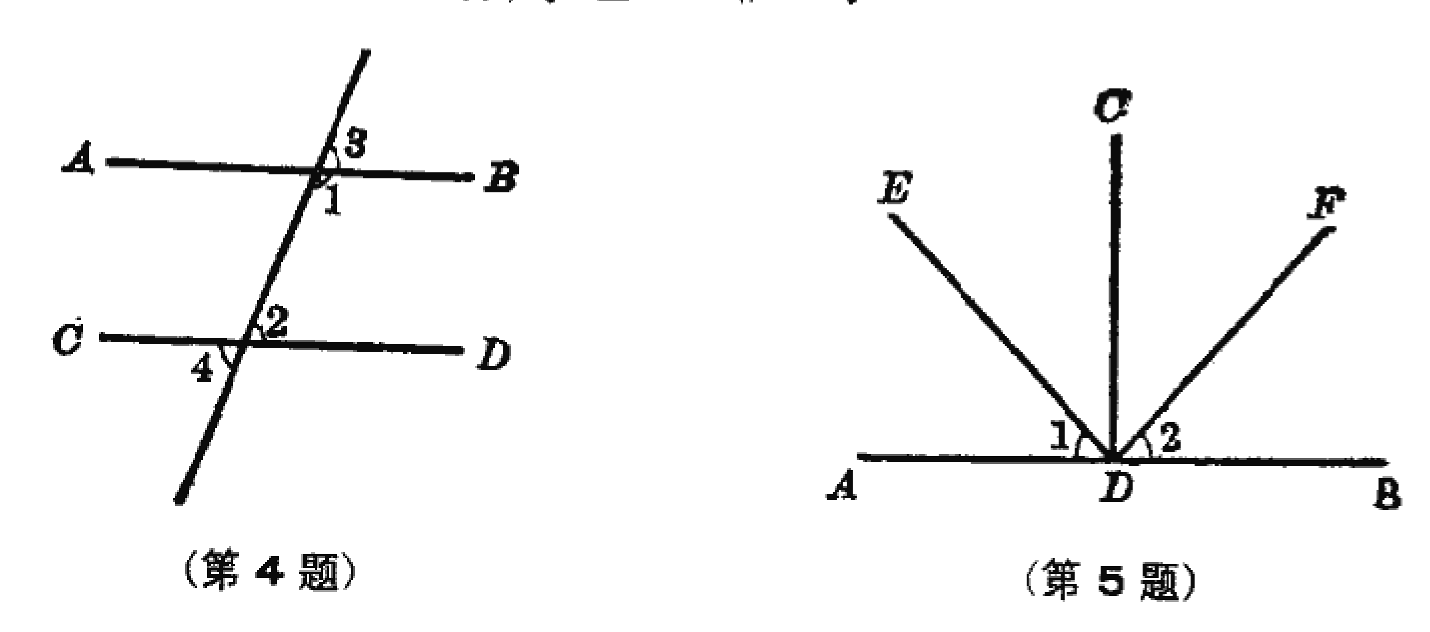
(第 2 题)　　　　(第 3 题)

3. 已知 $\angle AOB$, $\angle COD$ 都是直角,证明 $\angle 1=\angle 2$.
4. (1) 若 $AB \parallel CD$, 求证:

$$\angle 1+\angle 2=180°,\quad \angle 3=\angle 4;$$

① 恩格斯:《反杜林论》,人民出版社 1970 年版,第 132 页.

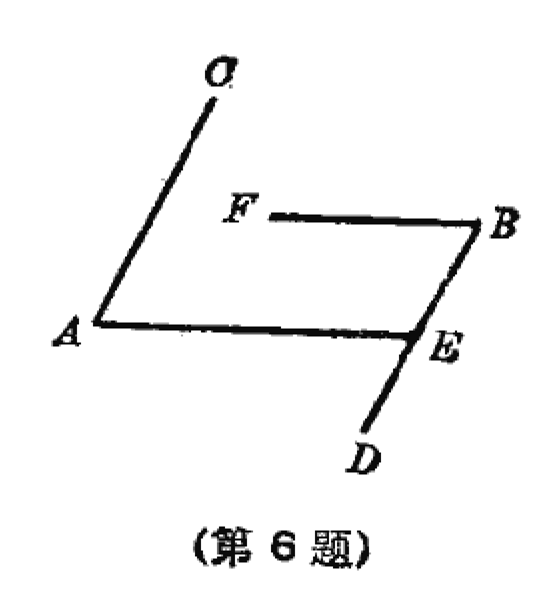
(2) 若 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互补，求证 $AB \parallel CD$.



(第 4 题)　　(第 5 题)

5. 若图中 $CD \perp AB$，$\angle EDC = \angle FDC$，求证 $\angle 1 = \angle 2$.

6. 图中 $\angle A$ 与 $\angle B$ 的两边分别平行，即 $AC \parallel BD$，$AE \parallel BF$，证明 $\angle A = \angle B$.



(第 6 题)

第二章　三　角　形

三角形是一种基本的几何图形．在工农业生产中，形状为三角形的结构有着广泛的应用。例如，我们经常看到的架设高压输电线的铁塔，上面有许多由钢材交叉而成的三角形；又如，自行车架，房屋的人字架和起重机的吊架等都采用三角形的结构．

为什么在生产实践中广泛地采用三角形结构呢？

毛主席教导我们：**"一切真知都是从直接经验发源的。"**三角形结构的广泛采用，就来源于人们的长期生产实践．

我们先来做一个实验：用木条钉一个三角形和一个四边形的架子，如果拉动这两个架子，就会发现三角形架子的形状始终不变，而四边形架子的形状可以改变．这个事实说明，三角形具有一种使结构不变的性质，我们把这种性质叫做三角形的稳定性．由于三角形具有稳定性，采用三角形结构，就能增加物体的坚固程度，而且又节约了材料，因此它在生产实践中被广泛地采用．

在日常生活中也经常应用到三角形的稳定性．例如，当我们坐的椅子摇晃时，只要在椅腿和椅板之间钉上一根木条，构成一个三角形，椅子就牢固了；当我们使用人字梯时，只要用铁钩把梯子两边连在一起，构成一个三角形，就能防止滑动，等等．

三角形除了它特有的稳定性之外，还具有哪些性质？ 在生产实践中还有哪些应用？这就是本章所要研究的主要问题.

第一节 三角形三内角的和与勾股定理

三角形有三条边和三个角，要研究三角形的性质，首先考察三角形的三个角之间和三条边之间的内在联系.

一、三角形三内角的和

三角形的三个内角有什么联系呢？如果我们用硬纸片任意剪一个三角形，然后把其中的两个角剪下来和第三个角拼在一起，如图 2-1 所示，就会发现这三个角恰好构成一个平角. 从这里，我们感性地认识到：三角形三个内角之和等于 180°. 这个结论是否具有普遍性呢？我们可以用推理的方法加以证明.

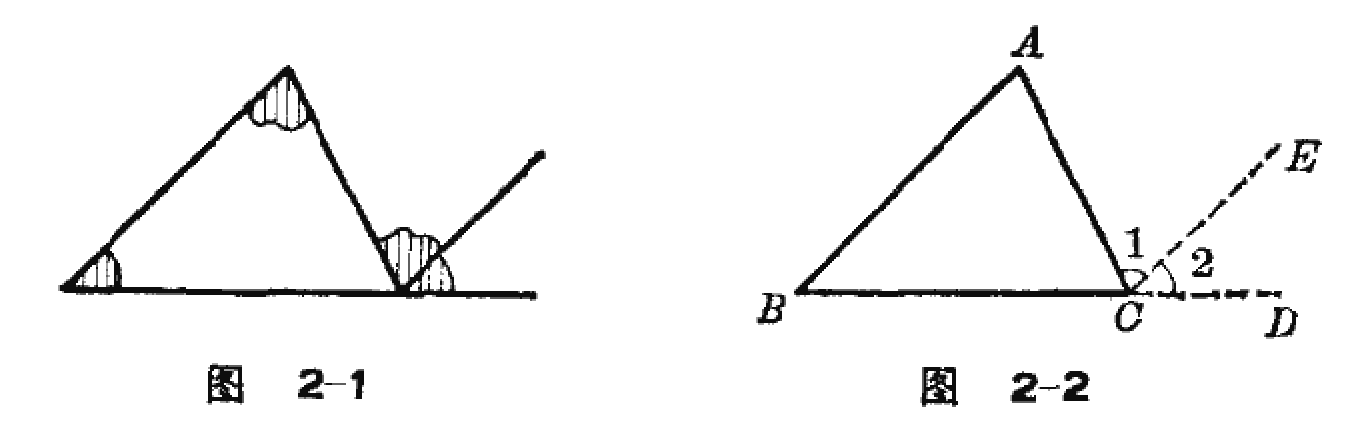


图 2-1　　图 2-2

定理　三角形的三内角之和等于 180°.

已知　$\triangle ABC$ 的三个内角 $\angle A$、$\angle B$ 和 $\angle C$.

求证　$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

分析　如果延长三角形的一边，例如在图 2-2 中延长 BC 到 D，那末 $\angle ACD$ 与内角 $\angle ACB$ 互为补角，它们的和等于 180°. 要证明 $\triangle ABC$ 的三内角之和等于 180°，只要证明 $\angle A$ 与 $\angle B$ 的和等于 $\angle ACD$ 就可以了.

证明 延长 BC 到 D，过 C 作 $CE \parallel BA$，

$\because$ $\angle A=\angle 1$（两直线平行，则内错角相等），

$\angle B=\angle 2$（两直线平行，则同位角相等），

$\therefore$ $\angle A+\angle B+\angle ACB=\angle 1+\angle 2+\angle ACB$

$=180°$，

即

$$\angle A+\angle B+\angle C=180°.$$

在上面的证明过程中，我们在原来的图形上添作了 BC 的延长线 CD 和平行于 AB 的直线 CE，CD 和 CE 叫做辅助线. 今后在解题和证题过程中，经常采用添辅助线的办法，把已知条件和未知结论联系起来，以促使未知向已知转化. 辅助线通常画成虚线.

我们把三角形的一边和另一边的延长线所组成的角(如图 2-2 中的 $\angle ACD$) 叫做三角形的一个外角. 从上面的证明可知

$$\angle ACD=\angle 1+\angle 2=\angle A+\angle B.$$

由此得到三角形的外角性质：三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和.

[例 1] 飞机从 A 地飞往 B 地，因受侧风的影响，一开始就偏离航线 AB 飞到了 C 点，如图2-3，已知偏航角 $\angle A=7°$，偏离角 $\angle B=9°$，求修正角 $\angle BCD$.

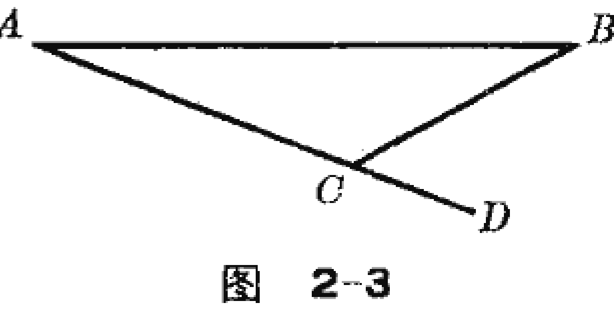


图 2-3

解：$\angle BCD=\angle A+\angle B$（三角形外角性质），而 $\angle A=7°$，$\angle B=9°$（已知），所以

$$\angle BCD=7°+9°=16°.$$

［例 2］ 求四边形的四个内角之和.

解：连对角线 AC（图 2-4），把四边形 $ABCD$ 分为两个三角形 ABC 和 ACD. 于是四边形的四个内角的和

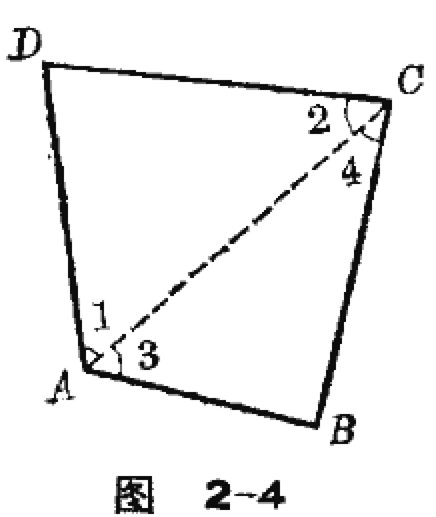


图 2-4

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D$$
$$=(\angle 1+\angle 2+\angle D)$$
$$+(\angle 3+\angle 4+\angle B)$$
$$=180^\circ+180^\circ=360^\circ.$$

［例 3］ 求六角螺母的每个内角.

解：我们把各边都相等、各内角都相等的多边形叫做正多边形. 六角螺母的正面图是一个正六边形.

过六边形 $ABCDEF$ 的一个顶点 A，作对角线 AC、AD、AE，这样就把这个六边形分为四个三角形：$\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle ADE$ 和 $\triangle AEF$（图 2-5）. 这个六边形六个内角的和就是这四个三角形内角之和的总和. 所以

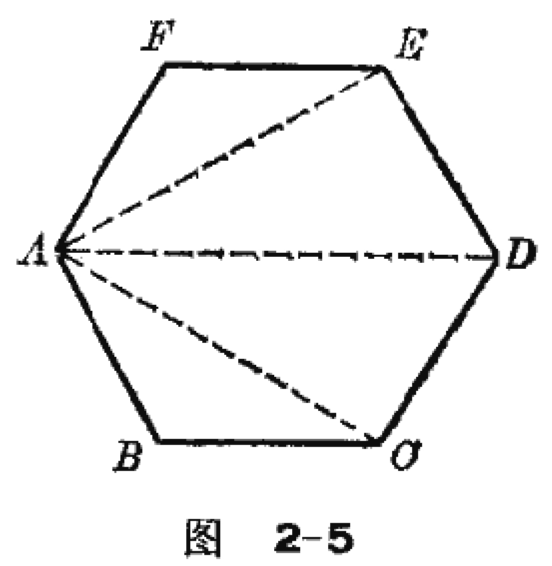


图 2-5

$$六角螺母内角之和=4\times 180^\circ=720^\circ.$$

因为六角螺母六个内角都相等，每个角等于内角之和的 $\frac{1}{6}$，所以

$$六角螺母每个内角=720^\circ\times\frac{1}{6}=120^\circ.$$

上面的例题启示我们：如果多边形的边数是 n，从它的一个顶点作所有的对角线，就可以把这个 n 边形分成 $(n-2)$ 个三角形. 这样，n 边形的内角之和就等于这 $(n-2)$ 个三角形的内角之和的总和，于是得到

定理 n 边形的内角之和$=(n-2)\times180°$.

因为正 n 边形的 n 个内角都相等，所以

$$\text{正 } n \text{ 边形每个内角}=\frac{n-2}{n}\times180°.$$

三角形根据它的内角的大小可分为三类：每个内角都是锐角的三角形叫做锐角三角形；如果有一个内角是直角就叫直角三角形；如果有一个内角是钝角就叫钝角三角形.

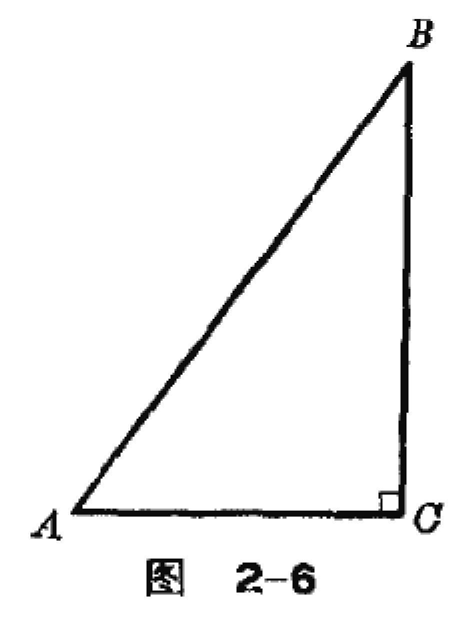


图 2-6

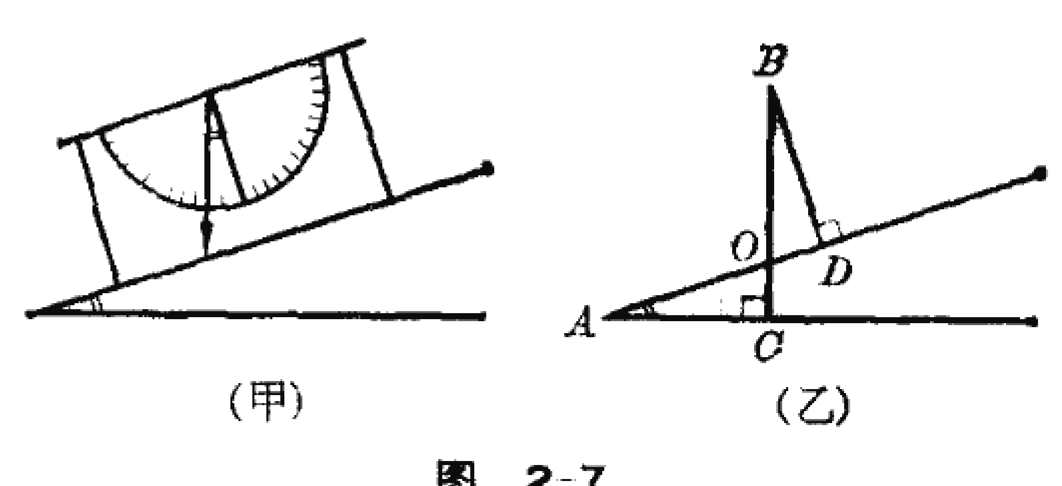
在直角三角形中，因为有一个内角是直角，其他两个角必然都是锐角. 如 $\angle C$ 是直角（图 2-6），

$\because\quad \angle A+\angle B+\angle C=180°$,

$\therefore\quad \angle A+\angle B=180°-\angle C=180°-90°=90°$.

由此可知：直角三角形的两个锐角互为余角.

[例 4] 在修建堤坝时，常用测倾仪测量堤坝的倾斜角，如图 2-7（甲），测倾仪悬垂的指针所指度数就是倾角的度数，为什么？



（甲） （乙）

图 2-7

解：为了便于说明，将测倾仪所指的角和堤坝倾角的位置关系表示如图 2-7（乙），问题就转化为

已知：$AC\perp BC$, $AD\perp BD$.

求证：$\angle A=\angle B$.

证明：在 $\triangle ACO$ 中，$\angle C=90°$ （$\because$ $AC\perp BC$），

$\therefore$ $\angle A+\angle AOC=90°$（直角三角形的两锐角互余）．

同理

$$\angle B+\angle BOD=90°.$$

又 $$\angle AOC=\angle BOD \text{（对顶角相等）},$$

$$\therefore \quad \angle A=\angle B.$$

由这个例题可以得到

定理 如果一个锐角的两条边分别垂直于另一锐角的两条边，那末这两个锐角相等．

二、勾股定理

现在我们再来研究三角形中三条边之间的联系．

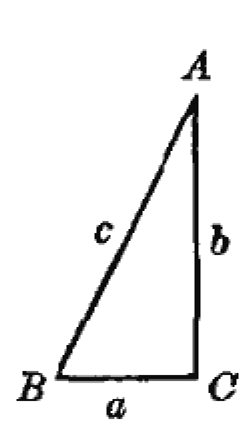
我国古代劳动人民，在长期的生产实践中很早就发现了直角三角形三边之间的关系．他们把直角三角形中短的直角边叫做勾，长的直角边叫做股，斜边叫做弦．据我国西汉时期的著名算书《周髀算经》记载，早在周朝时代，就有"勾三股四弦五"的说法，也就是说，如果直角三角形两条直角边的长度分别是 3 与 4，则斜边长度就是 5．以后逐步发现直角三角形三边具有更普遍的规律：

$$\text{勾}^2+\text{股}^2=\text{弦}^2.$$

我国发现这个关系式比西方要早好几百年，这是我国古代文化伟大成就之一．

勾股定理 直角三角形两直角边平方的和等于斜边的平方．

这个定理的证明方法很多，我国古代采用的证法之一，就是把四个形状大小完全一样的直角三角形拼成图 2-8，然后通过这个图来证明的．下面我们用推理的方法来表达这个定



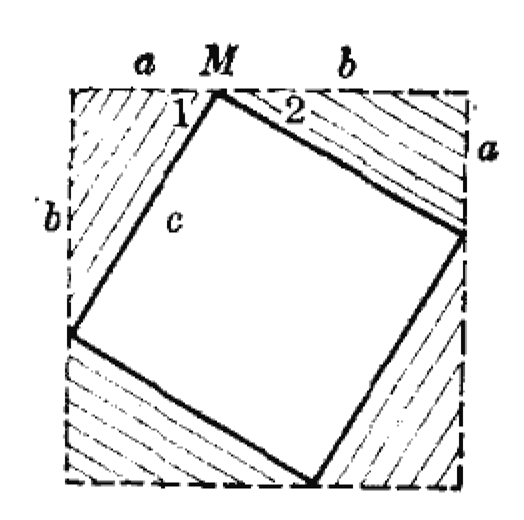


图 2-8

理的证明过程.

已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$.

求证 $a^2+b^2=c^2$.

证明 图 2-8 可以看成是：先以斜边 c 为边长作一个正方形，再照已知直角三角形的形状大小剪四个直角三角形，将它们的斜边依次紧靠在正方形的四条边上.

因为过 M 点的 a、b 边所夹的角的大小是

$$\angle 1+\angle 2+90°=180°,$$

所以过 M 点的 a、b 边在一条直线上. 同理，图中的虚线都是直线，且都等于 $a+b$.

虚线四边形的四个角都是直角，因此它是边长为 $a+b$ 的正方形，它的面积是 $(a+b)^2$；另一方面，虚线四边形是由四个面积为 $\frac{ab}{2}$ 的直角三角形和一个面积为 c^2 的正方形组成. 所以有等式

$$(a+b)^2=4\cdot\frac{ab}{2}+c^2,$$

展开得

$$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2,$$

两边减去 $2ab$，就得

$$a^2+b^2=c^2.$$

根据勾股定理，如果知道直角三角形任何两边的边长，就可以求出第三边边长：

$$c=\sqrt{a^2+b^2},\quad a=\sqrt{c^2-b^2},\quad b=\sqrt{c^2-a^2}.$$

[例 5] 架线工人用钢绳加固电线杆，如果钢绳的上端离地面 6 米，下端离电线杆脚 4 米，问钢绳应取多少米？

解：电线杆是垂直于地面的，它与钢绳、地面围成一个直角三角形，钢绳是斜边．设钢绳长为 x 米，由勾股定理得

$$x=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}\approx7.21.$$

所以，钢绳应略长于 7.21 米．

[例 6] 某车间要把一批截面为正方形的钢料，去掉四角，加工成正八边形工件．已知正方形边长为 50 毫米，求加工后的正八边形边长．

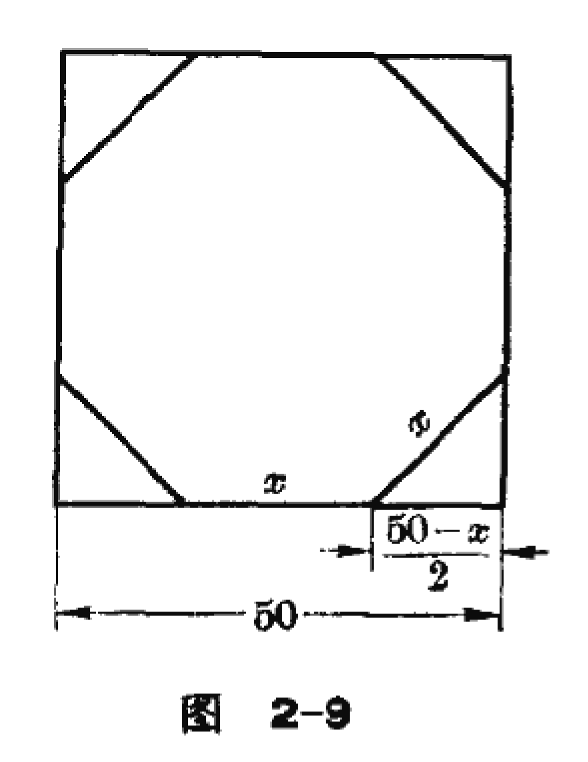


图 2-9

解：设正八边形边长为 x 毫米．由图 2-9 可以看出，去掉的四个角都是直角三角形，它的斜边长为 x，两条直角边的长都是 $\frac{50-x}{2}$，由勾股定理得

$$x=\sqrt{\left(\frac{50-x}{2}\right)^2+\left(\frac{50-x}{2}\right)^2}$$

即

$$x=\frac{50-x}{\sqrt{2}},$$

整理得

$$(\sqrt{2}+1)x=50,$$

$$x=\frac{50}{\sqrt{2}+1}=50(\sqrt{2}-1)\approx50\times0.414=20.7.$$

所以，正八边形每边长约为 20.7 毫米．

小　结

1. 三角形内角之和为 180°:

(1) 直角三角形两锐角互余;

(2) 三角形外角等于不相邻两内角之和;

(3) n 边形内角之和为 $(n-2)\times180°$.

2. 勾股定理:

(1) 直角三角形三条边的关系:

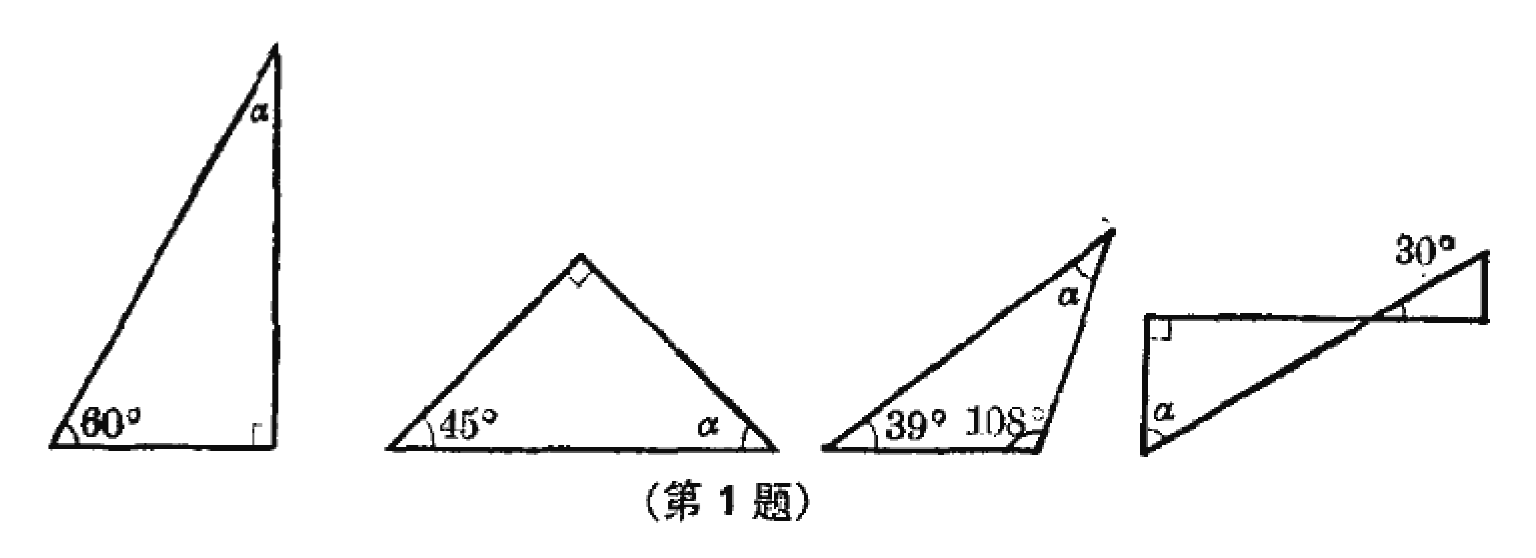
$$a^2+b^2=c^2;$$

(2) 直角三角形边长计算公式(已知两边求第三边):

$$c=\sqrt{a^2+b^2},\quad b=\sqrt{c^2-a^2},\quad a=\sqrt{c^2-b^2}.$$

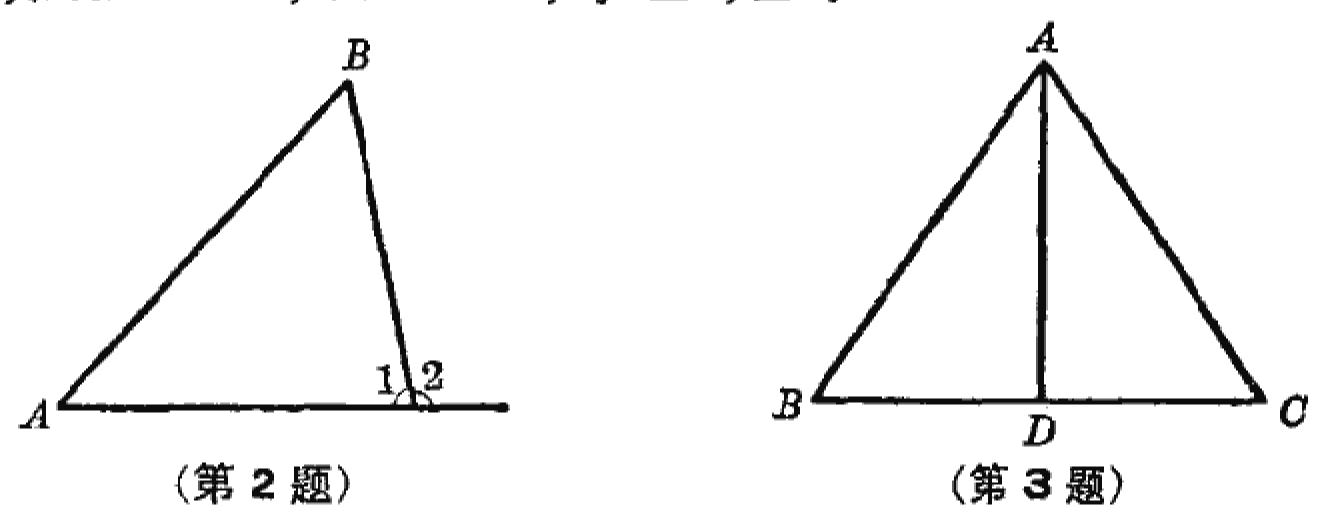
习　题

1. 求下列各图形中的未知角 α:



(第 1 题)

2. 已知 $\angle A=50°$, $\angle B=55°$, 求 $\angle1$, $\angle2$.

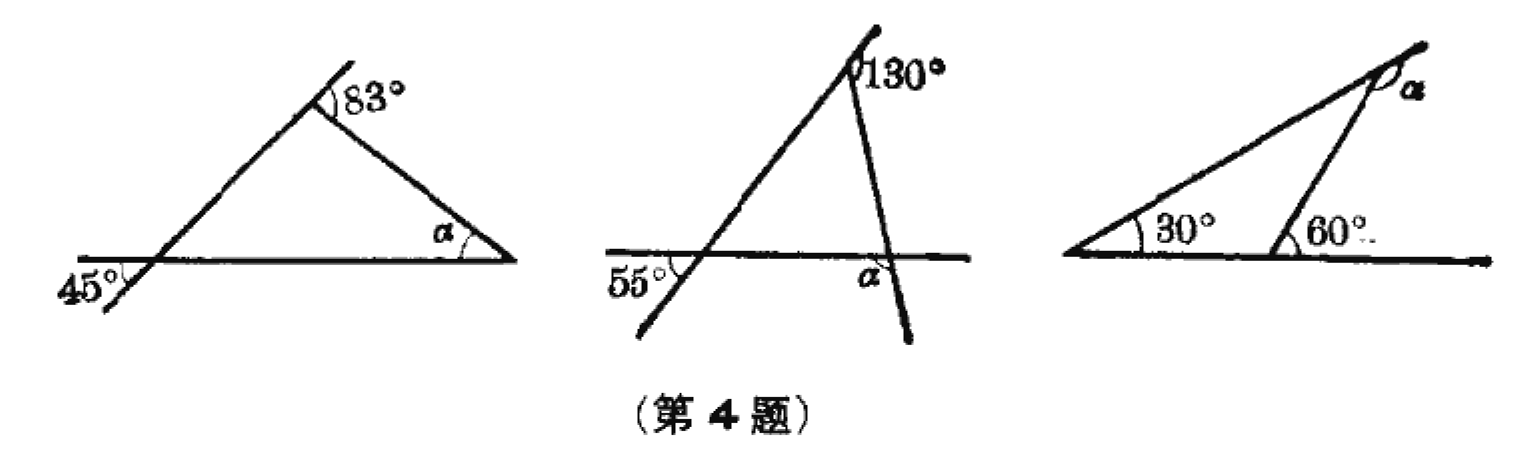


(第 2 题)　　(第 3 题)

3. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $\angle B=\angle C$, AD 是 $\angle A$ 的平分线,求证 $\triangle ABD$

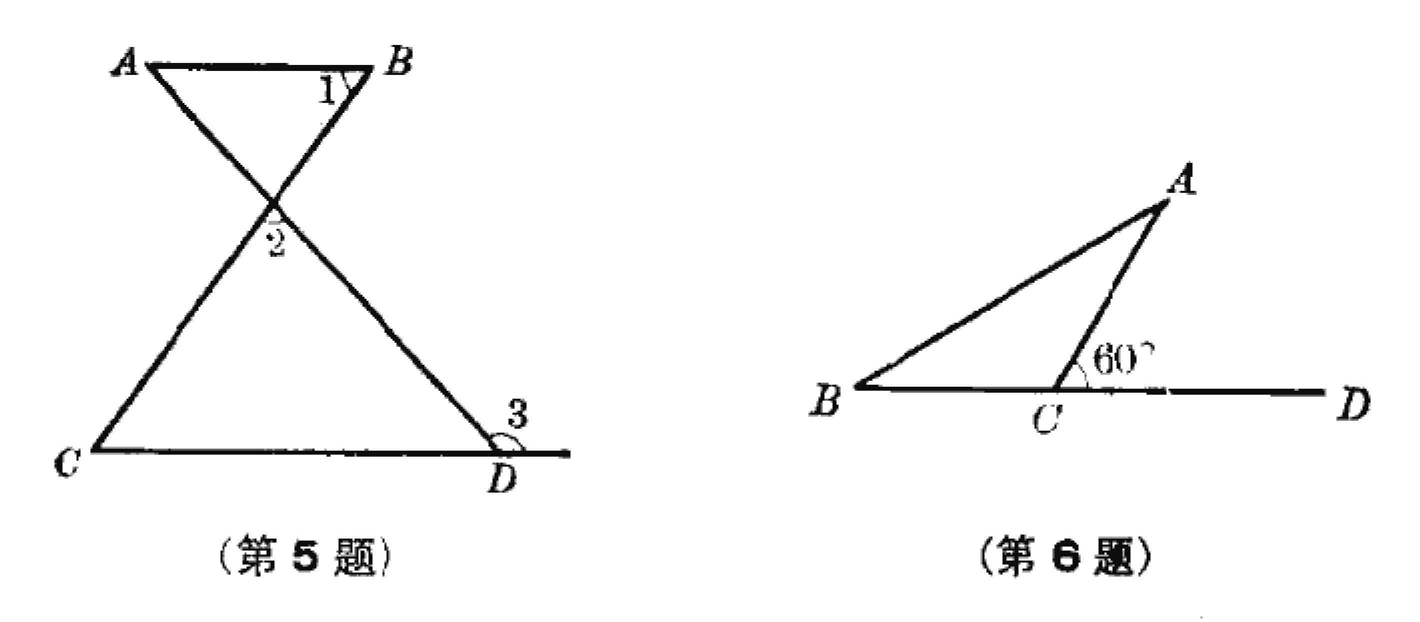
是直角三角形.

4. 求下列各图形中的未知角 α:



(第 4 题)

5. 已知 $AB \parallel CD$, $\angle 1=55°$, $\angle 2=80°$, 求 $\angle 3$.

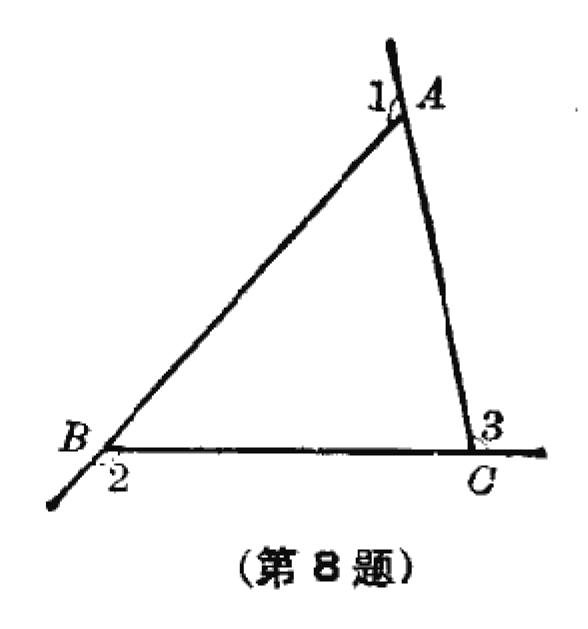


(第 5 题)　　(第 6 题)

6. 已知 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACD=60°$, $\angle A=\angle B$, 求 $\triangle ABC$ 各内角的度数.

7. 已知三角形的两个内角相等, 另一个内角等于这两个内角的和, 求各内角的度数.

8 已知 $\angle 1$, $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 都是 $\triangle ABC$ 的外角, 求证 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=360°$.

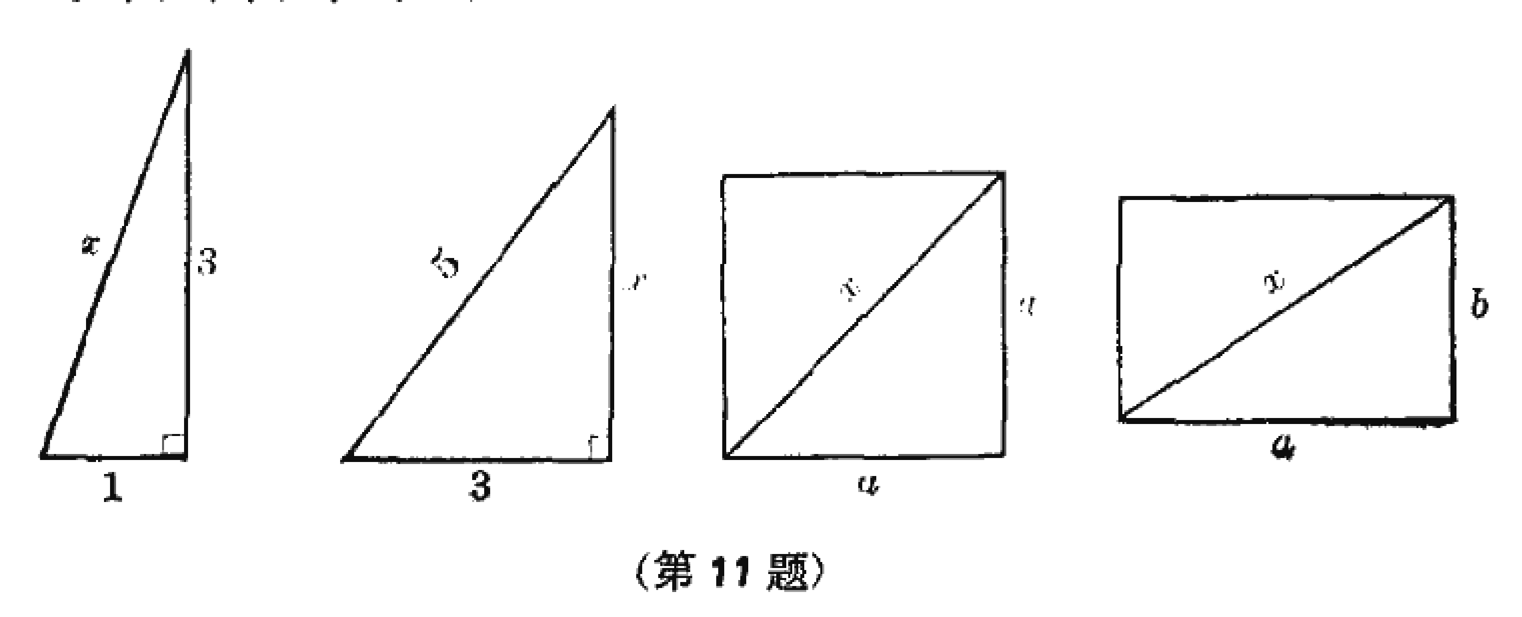


(第 8 题)

9. 证明：n 边形的外角之和等于 $360°$.

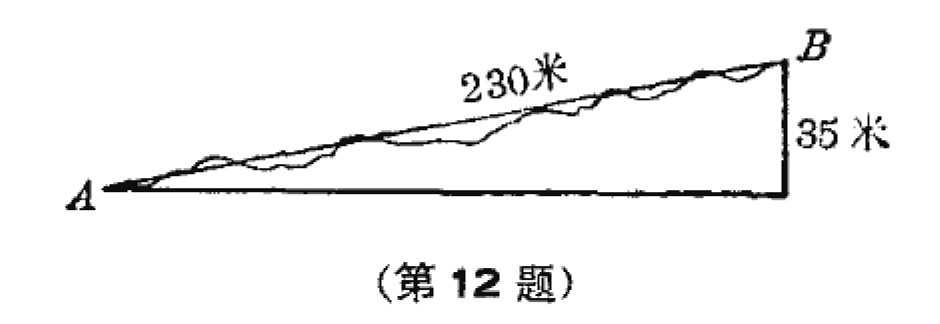
10. 求正五边形每个内角的度数.

11. 求下列图形中的长度 x:



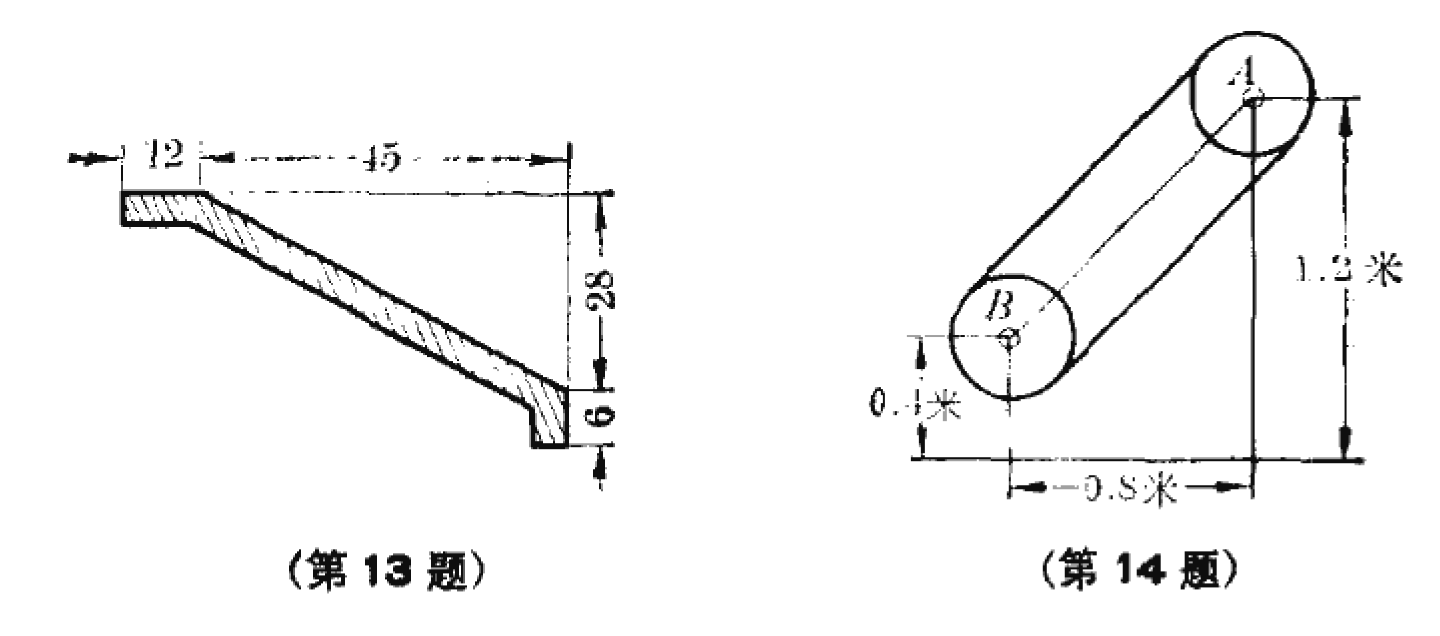
(第 11 题)

12. 山坡上 A、B 两点的坡面距离是 230 米，高度差是 35 米，求 A、B 两点间的水平距离.



(第 12 题)

13. 梁柱间的支架如图所示，试根据图示尺寸(单位是厘米)，求支架的总长度.



(第 13 题)　　(第 14 题)

14. 安装电动机皮带时，要先求出两轮的中心距. 已知两轮中心的水平距离为 0.8 米，对地面距离分别为 0.4 米和 1.2 米，求两轮的中心距 AB.

第二节　全等三角形

半径相等的两个圆，边长相等的两个正方形，它们的形状、大小都是完全相同的．如果分别把它们迭在一起，它们的各部分就完全重合．我们把能够完全重合的两个图形叫做全等形．

定义　能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形．

通常用记号"≅"表示全等，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 全等，就记作

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

在全等三角形中，能够互相重合的边、角分别叫做全等三角形的对应边和对应角．例如 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (图 2-10)，

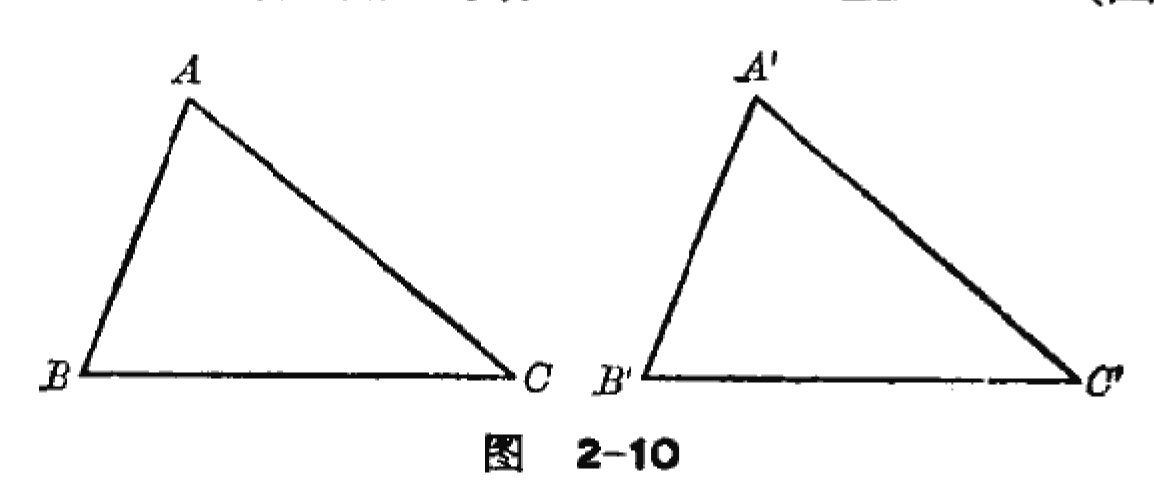


图　2-10

其中

$$AB \text{ 和 } A'B', \quad BC \text{ 和 } B'C', \quad AC \text{ 和 } A'C'$$

都是对应边；

$$\angle A \text{ 和 } \angle A', \quad \angle B \text{ 和 } \angle B', \quad \angle C \text{ 和 } \angle C'$$

都是对应角．

很明显，全等三角形的对应边相等，对应角也相等．

一、全等三角形的判定

在一些实际问题中，要证明两条线段或两个角相等，往

往是将这两条线段或两个角分别看成是某两个三角形的边或角,先证这两个三角形全等,然后说明它们的对应边或对应角相等.

为此,有必要研究判定两个三角形全等的方法.

我们知道,两个圆的半径相等,这两个圆就全等;两个正方形的边长相等,这两个正方形就全等. 可见判定两个圆全等或判定两个正方形全等,只需要一个条件就可以了.

对两个三角形来说,究竟需要几个条件,才能判定它们全等呢?

根据三角形的稳定性,我们知道,当三角形的三条边确定以后,这个三角形的形状大小就始终不变,因此,如果两个三角形的三条边对应相等,那末这两个三角形的形状大小就完全一样,迭起来就能完全重合,于是我们得到

判定定理 1 如果两个三角形的三边对应相等,则这两个三角形全等(简写成边、边、边).

根据这个定理可以看出,判定两个三角形全等,要有三个条件,但要注意:并非任意三个条件都能使两个三角形全等的.

例如,在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中(图 2-11)有 $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle B=\angle B'$, 虽然具备了三个条件,但这两个三角形并不全等. 因此,两边和其中一边的对角对应相等的两个三角形不一定全等.

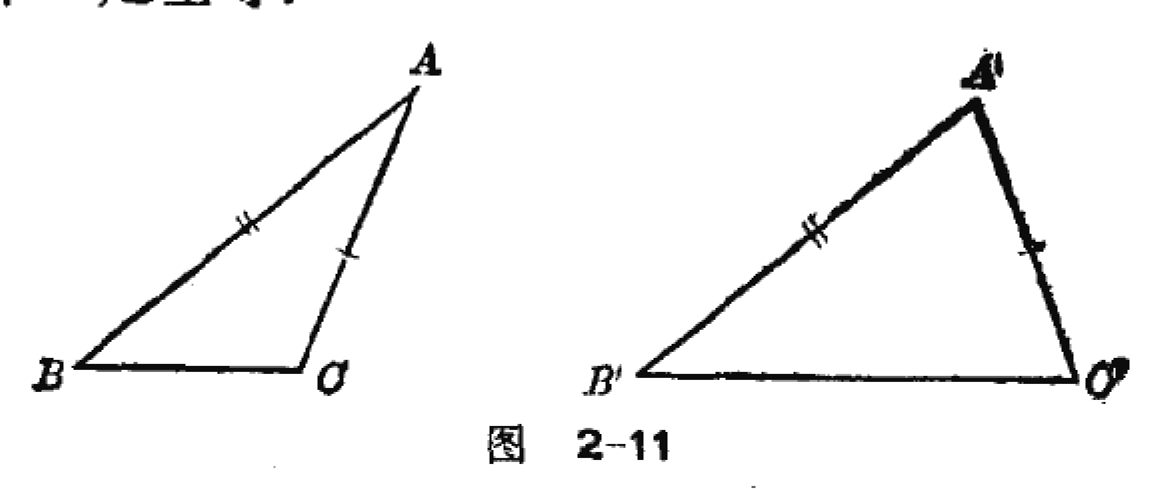


图 2-11

在长期的生产斗争中，人们通过反复实践，除了掌握判定定理1之外，还总结出下面两个判定三角形全等的方法.

判定定理2 如果两个三角形两边和夹角对应相等，则这两个三角形全等(简写成边、角、边).

判定定理3 如果两个三角形两角和夹边对应相等，则这两个三角形全等(简写成角、边、角).

由判定定理3可以推得

推论 如果两个三角形的两角和其中一角的对边对应相等，则这两个三角形全等.

根据上述定理和推论，要判定两个三角形全等，只需找出下列三对相等的量就可以了，即边、边、边；或边、角、边；或角、边、角. 在每种情况中，至少要有一条边对应相等.

[例1] 要测量工件内槽的宽 AB，可以把两根钢条 AA' 和 BB' 的中点 O 连在一起做成卡钳(图2-12)，使用卡钳只要量出 A'、B' 两点间的距离，就能知道工件内槽的宽度. 为什么？

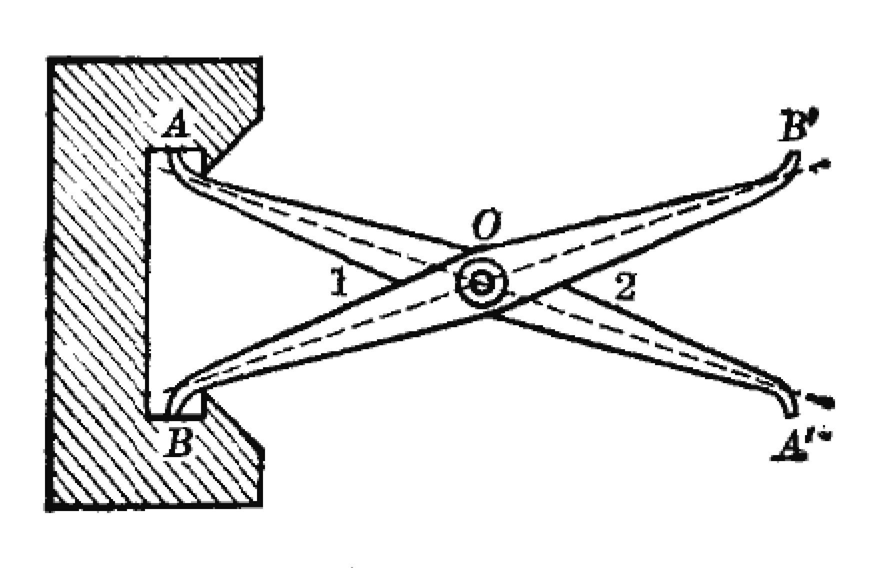


图 2-12

解：为了说明 $A'B'=AB$，只要证明 $\triangle AOB\cong\triangle A'OB'$ 就行了.

$\because$ $OA=OA'$, $OB=OB'$ (O 是 AA' 和 BB' 的中点)，

又 $\angle 1=\angle 2$ (对顶角相等)，

$\therefore\quad \triangle AOB \cong \triangle A'OB'$ （边、角、边），

$AB = A'B'$ （全等三角形的对应边相等）.

因此，$A'B'$ 间的距离就是工件内槽的宽.

[例 2] 某战士测量河宽，他先直立在河边的 B 点望对岸，视线 AC（图 2-13）通过帽檐的下沿落在对岸的 C 点上；然后保持原有姿势向后转，视线 AD 通过帽檐的下沿落在河的这一边的 D 点上，量出 BD 的长就得出河宽，为什么？

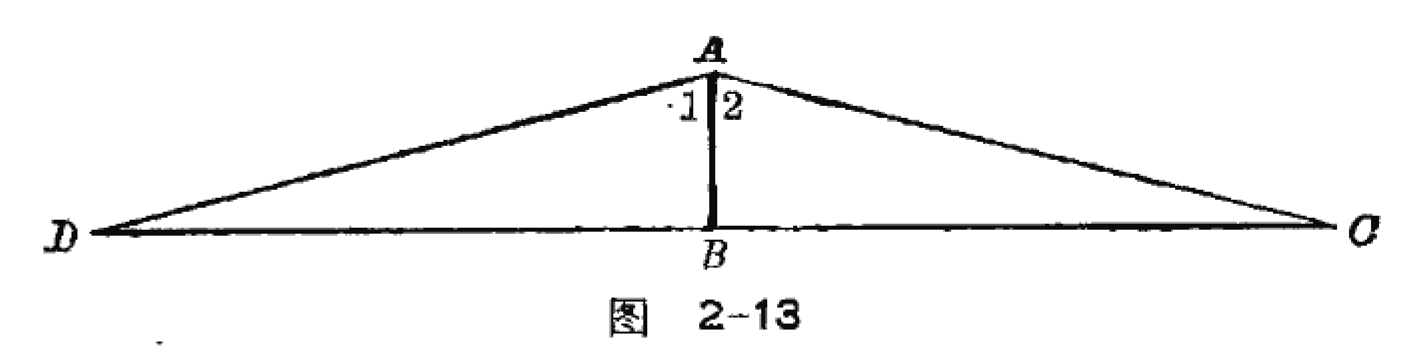


图 2-13

解：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中，

$\because\quad \angle ABC = \angle ABD = 90°$ （人直立于地面），

AB 是公共边，

$\angle 1 = \angle 2$ （视线的角度未变），

$\therefore\quad \triangle ABC \cong \triangle ABD$ （角、边、角），

$BC = BD$ （全等三角形的对应边相等）.

因此量出 BD 的长就得出河宽 BC.

[例 3] 作已知角 $\angle AOB$ 的平分线.

作法：(1) 以 O 为圆心，以适当长为半径画弧交 $\angle AOB$ 的两边于 E，F（图 2-14）；

(2) 分别以 E，F 为圆心，以同半径画弧，两弧交于 N；

(3) 连接 ON，ON 就是 $\angle AOB$ 的平分线.

证明：在 $\triangle EON$ 和 $\triangle FON$ 中，

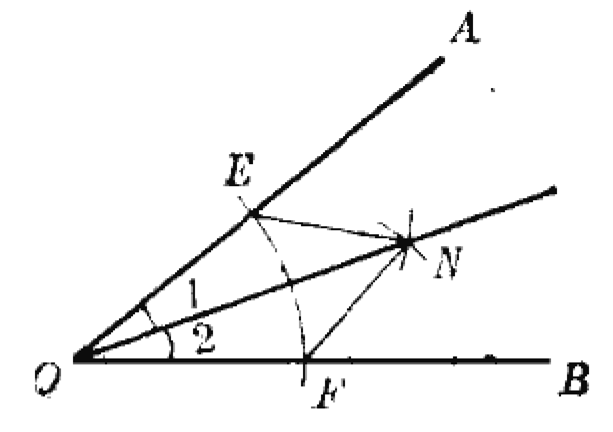


图 2-14

$OE=OF$, $EN=FN$ (作法),

ON 是公共边,

$\therefore$ $\triangle EON \cong \triangle FON$ (边、边、边),

$\angle 1=\angle 2$ (全等三角形的对应角相等).

因此 ON 是 $\angle AOB$ 的平分线.

[例 4] 两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形.

试证平行四边形具有下列性质:

(1) 对边相等;

(2) 对角线互相平分.

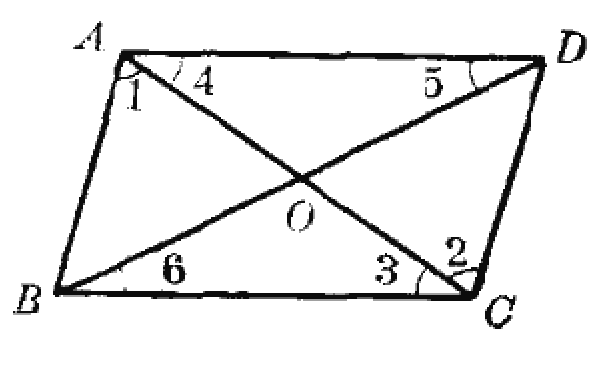


图 2-15

已知: 四边形 $ABCD$ 为平行四边形(图 2-15), 即

$$AB \parallel DC, \quad AD \parallel BC,$$

对角线 AC, BD 相交于 O.

求证: (1) $AB=CD$, $BC=AD$;

(2) $AO=OC$, $DO=OB$.

证明: (1) 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中,

$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$ (两直线平行, 则内错角相等),

AC 是公共边,

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (角、边、角),

$\therefore$ $AB=CD, BC=AD$ (全等三角形的对应边相等);

(2) 在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle COB$ 中,

$\angle 4=\angle 3$, $\angle 5=\angle 6$ (两直线平行, 则内错角相等),

$AD=BC$ (已证),

$\therefore$ $\triangle AOD \cong \triangle COB$ (角、边、角),

$\therefore$ $AO=OC$, $DO=OB$ (全等三角形的对应边相等).

由于平行四边形具有对角线互相平分的性质, 如果将平行四边形绕着它的对角线交点 O 旋转 $180°$, 那末 B 点就转

到 D 点的位置上，D 点就转到 B 点的位置上．同样 A、C 也互换了位置，平行四边形旋转之后的新位置与旋转之前的原位置重合．

如果一个图形绕着某一点旋转 180° 后，它的新位置与原来的位置能完全重合，这种图形叫做中心对称图形，这个点就叫做对称中心，能重合的点叫做对称点．

可见平行四边形是中心对称图形，对角线的交点 O 是它的对称中心，对角顶点 B 和 D，A 和 C 都是关于 O 的对称点．

因为中心对称的图形能够平稳的旋转，所以需要转动的机械零件常设计成中心对称的形状．如飞机的螺旋桨，抽水机中水泵的叶轮，工厂中的铣刀等往往是中心对称图形．

［例 5］ 在画零件图时，常用下述方法等分线段，例如把线段 AB 五等分．

作法：(1) 过 A 点任意作另一条直线 AP (图 2-16)；

(2) 从 A 点开始在 AP 上连续截取五段相等的线段 AA_1，A_1A_2，…，A_4A_5；

(3) 连接 A_5B，过 A_1，A_2，A_3，A_4 分别作平行于 A_5B 的直线，这组平行线就把线段 AB 五等分，即

$AC=CD=DE=EF=FB$.

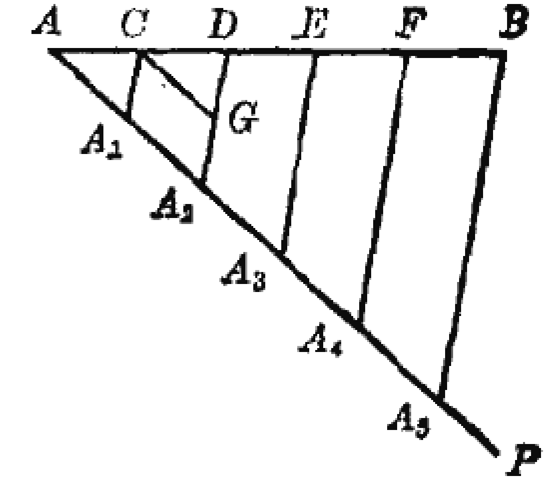


图 2-16

分析：先说明 $AC=CD$. 可把这两条线段看做是某两个全等三角形的对应边，为此，过 C 作 AP 的平行线交 DA_2 于 G，这样就得到两个三角形 ACA_1 及 CDG，分别以 AC，CD 为它们的一边，只要证明 $\triangle ACA_1 \cong \triangle CDG$ 就行了．

证明：$\because$ $CG \parallel A_1A_2$，$A_1C \parallel A_2G$ (作法)，

$\therefore$ A_1A_2GC 为平行四边形，

$CG=A_1A_2$ (平行四边形的对边相等).

又 $AA_1=A_1A_2$ (作法),

$\therefore\quad AA_1=CG.$

在 $\triangle AA_1C$ 和 $\triangle CGD$ 中,

$$AA_1=CG,$$

$$\angle A=\angle DCG,\ \angle ACA_1=\angle CDG$$

(两直线平行,则同位角相等),

$\therefore\quad \triangle AA_1C\cong\triangle CGD$ (判定定理 3 推论),

$\therefore\quad AC=CD$ (全等三角形的对应边相等).

同理可证

$$CD=DE=EF=FB.$$

把这个例题一般化,可以得到

定理 两条直线被一组平行线所截, 如果其中一条被截成相等线段,那末另一条也被截成相等的线段.

[例 6] 试证三角形两边中点连线(又叫三角形的中位线)平行于第三边且等于第三边的一半.

已知: M、N 分别为 $\triangle ABC$ 两边 AB、AC 的中点(图 2-17).

求证: $MN\parallel BC,\ MN=\dfrac{1}{2}BC.$

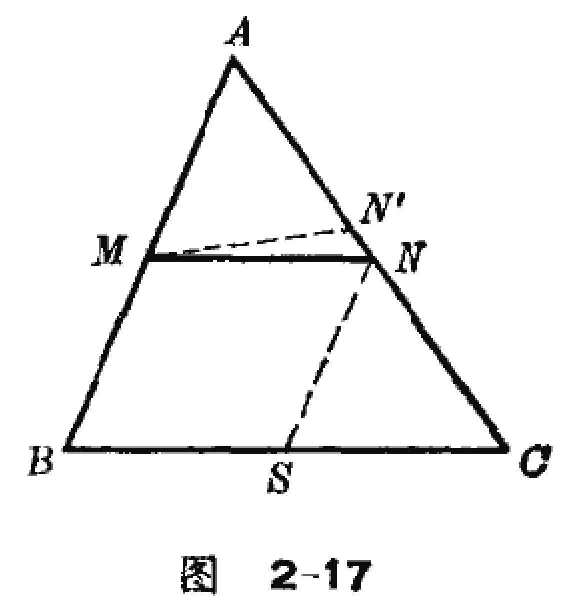


图 2-17

分析: 本题按已知条件直接去证明 $MN\parallel BC$ 就比较烦一些. 为此,我们可以设想过 M 作一条 BC 的平行线 MN', 只要证明 MN' 与 MN 重合,就说明 MN 平行于 BC.

证明: 过 M 作 BC 的平行线交 AC 于 N',

$\because\quad AM=MB,$

$$\therefore\quad AN'=N'C\ （平行线截得相等线段），$$

所以 N' 是 AC 的中点．但已知 N 也是 AC 的中点，而一条线段只有一个中点，因此 N' 与 N 重合，即 MN' 与 MN 重合．所以

$$MN \parallel BC.$$

下面再证明 $MN=\frac{1}{2}BC$.

取 BC 中点 S，连接 NS，则

$$NS \parallel AB\ （上面已证），$$

因此 $MBSN$ 为平行四边形，

$$\therefore\quad MN=BS\ （平行四边形对边相等），$$

$$\therefore\quad MN=\frac{1}{2}BC.$$

应用三角形中位线性质，可以求出被障碍物相隔的两点之间的距离．如图 2-18，A、B 两点间有楼房相隔，要求出 AB 的长，可以在 AB 之外选择一点 C，连接 AC 和 BC，并分别找出 AC，BC 的中点 D 和 E，量出 DE 的长再乘以 2，就得出 AB 的长．

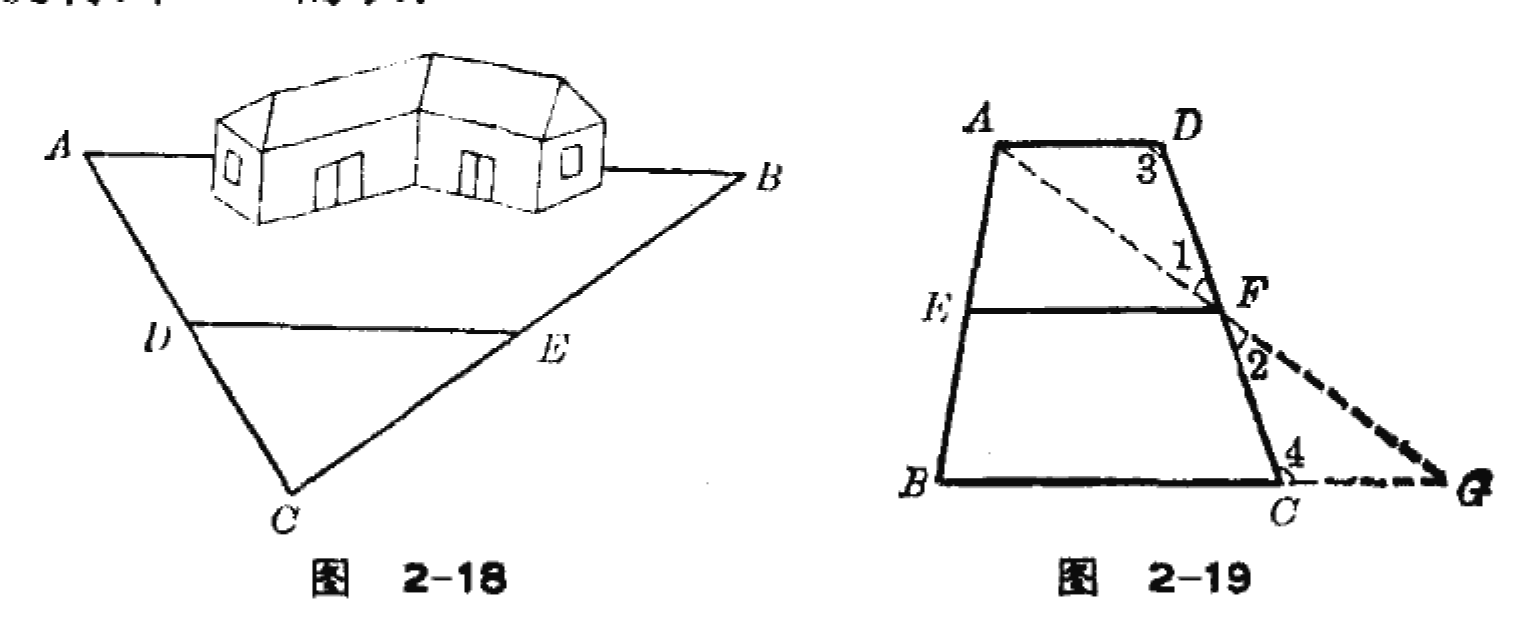


图 2-18　　　　图 2-19

［例 7］ 一组对边平行，另一组对边不平行的四边形叫做梯形，平行的两边叫做梯形的底，不平行的两边叫做梯形的腰，两腰中点连线叫做梯形的中位线．

试证明梯形的中位线平行于两底，且等于两底和的一半.

已知：在梯形 $ABCD$ 中（图 2-19），$AD \parallel BC$，E、F 分别为 AB，DC 的中点.

求证：$EF \parallel BC$；$EF \parallel AD$；且

$$EF=\frac{1}{2}(AD+BC).$$

分析：设法把 EF 转化成某一个三角形的中位线，问题就容易解决了.

证明：连接 AF 交 BC 的延长线于 G.

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle GCF$ 中，由于

$DF=FC$（已知），

$\angle 1=\angle 2$（对顶角相等），

$\angle 3=\angle 4$（两直线平行，则内错角相等），

$\therefore\ \triangle ADF \cong \triangle GCF$（角、边、角）.

$\therefore\ AF=FG$（全等三角形的对应边相等），

因此 EF 是 $\triangle ABG$ 的中位线.

$\therefore\ EF \parallel BC$；$EF \parallel AD$（梯形两底平行）.

又 $$EF=\frac{1}{2}BG=\frac{1}{2}(BC+CG),$$

$\because\ CG=AD$（$\triangle ADF \cong \triangle GCF$），

$$\therefore\ EF=\frac{1}{2}(BC+AD).$$

二、等腰三角形

人字屋架的形状（图 2-20）是两边相等的三角形，这种三角形叫做等腰三角形，相等的两边叫做腰，第三边叫做底边.

木工常用等腰三角形的木架来检验屋梁是否水平，检验的方法是这样的：将等腰三角形木架的底边 BC 放在屋梁上，

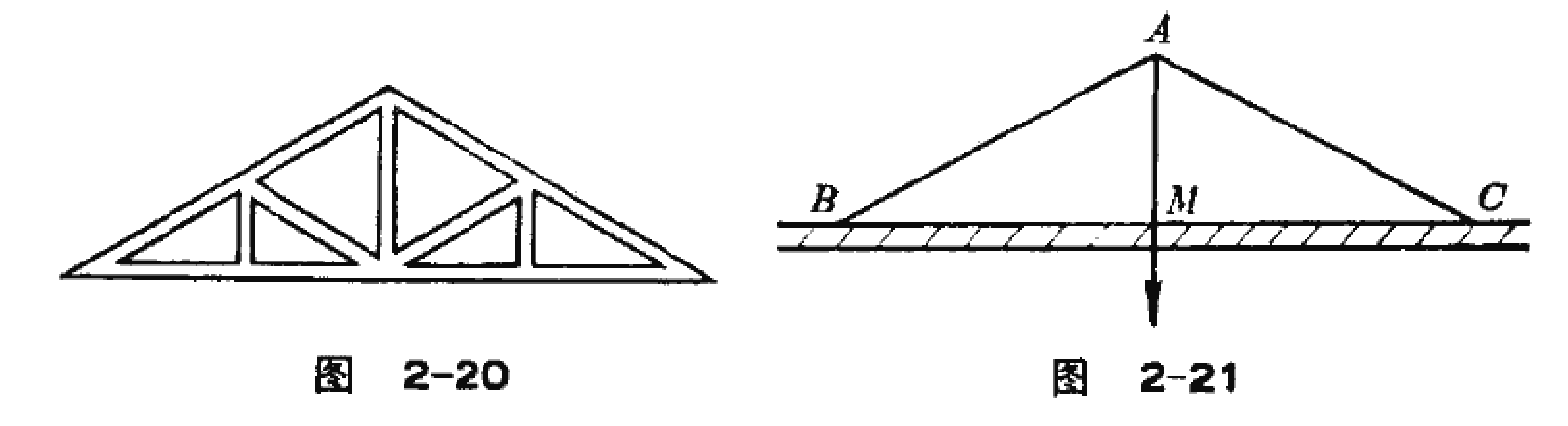


图 2-20　　图 2-21

如图 2-21，在木架顶点 A 悬挂一重锤，吊线是铅垂线，如果这铅垂线通过底边中点 M，就能断定屋梁是水平的．要弄清这个道理，必须了解等腰三角形的下列性质．

定理　等腰三角形顶角的平分线垂直平分底边．

已知　在 $\triangle ABC$ 中（图 2-22），$AB=AC$，$\angle 1=\angle 2$．

求证　$BD=DC$，$AD\perp BC$．

证明　在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$AB=AC$，$\angle 1=\angle 2$（已知），

AD 是公共边，

$\therefore$　$\triangle ABD\cong\triangle ACD$（边、角、边）．

$\therefore$　$BD=DC$（全等三角形的对应边相等），

$\angle 3=\angle 4$（全等三角形的对应角相等）．

$\because$　$\angle 3+\angle 4=180°$，

$\therefore$　$\angle 3=\angle 4=90°$，即 $AD\perp BC$．

从三角形的一个顶点 A 到对边中点的连线 AM 叫做该边

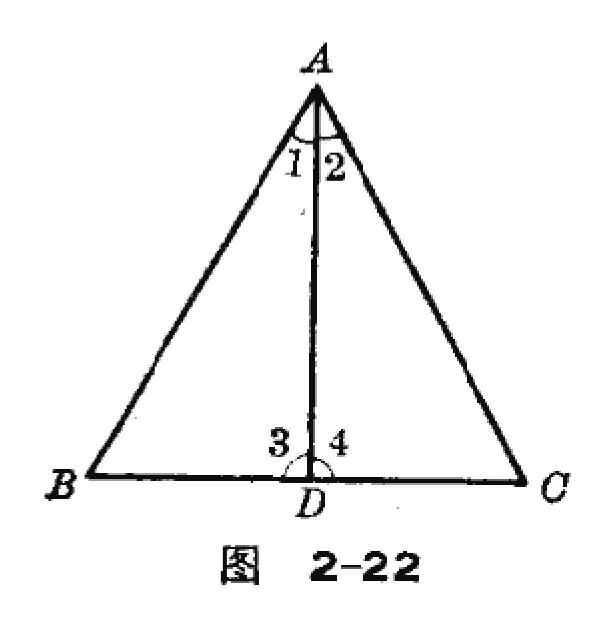


图 2-22

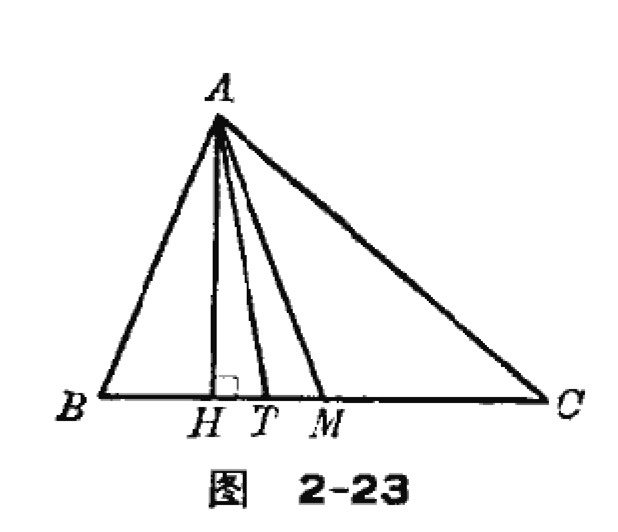


图 2-23

上的中线，从顶点 A 到对边的垂线 AH 叫做该边上的高．中线 AM，高 AH 以及 $\angle A$ 的平分线 AT，这三条线段在一般情况下是有区别的（图 2-23）．但在等腰三角形中，顶角平分线、底边上的高和中线相互重合，所以等腰三角形底边的垂直平分线必定通过顶点．木工就是根据这个性质应用等腰三角架来检验屋梁是否水平的，因为当过顶点的铅垂线通过底边中点 M 时，铅垂线就是底边上的高，所以铅垂线垂直于屋梁，说明屋梁是水平的．

在上面定理的证明过程中，因为 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$（图 2-22），所以 $\angle B = \angle C$（全等三角形的对应角相等）．由此得到等腰三角形的另一个重要性质：

定理　等腰三角形的两底角相等．

反之，如果一个三角形有两个角相等，它就是等腰三角形（读者自己证明）．

根据等腰三角形的性质，如果把等腰三角形沿着顶角平分线 AD 对折，那末左右两边的两部分就能完全重合．

一个图形如果沿某一直线对折后能使直线两边的两部分完全重合，就叫这个图形为轴对称图形，这条直线叫对称轴，能重合在一起的点叫对称点．因此等腰三角形是轴对称图形，顶角平分线是它的对称轴．

因为轴对称的物体具有受力均匀、制造方便而又美观的特点，因此轴对称图形在生产实践中应用较广．如工厂中常见的六角螺帽，它的正面图就是轴对称图形（图 2-24）．

［例 8］　屋架的下弦杆 BC 长 4 米，中柱 AM 高 1 米，求上弦杆 AB 的长（图 2-25）．

解：因为屋架 ABC 是等腰三角形，中柱 AM 垂直平分下弦 BC，所以

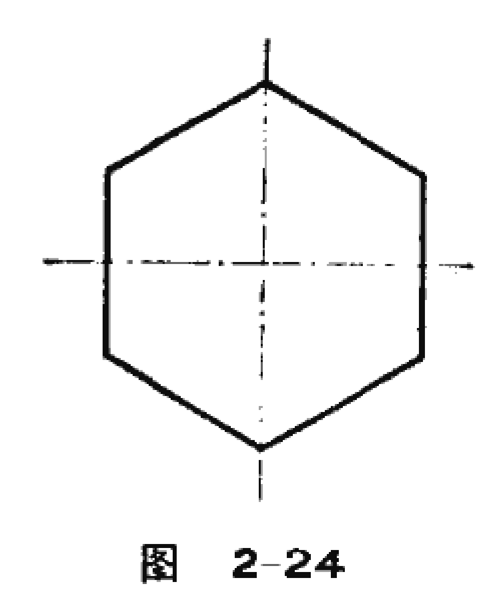


图 2-24

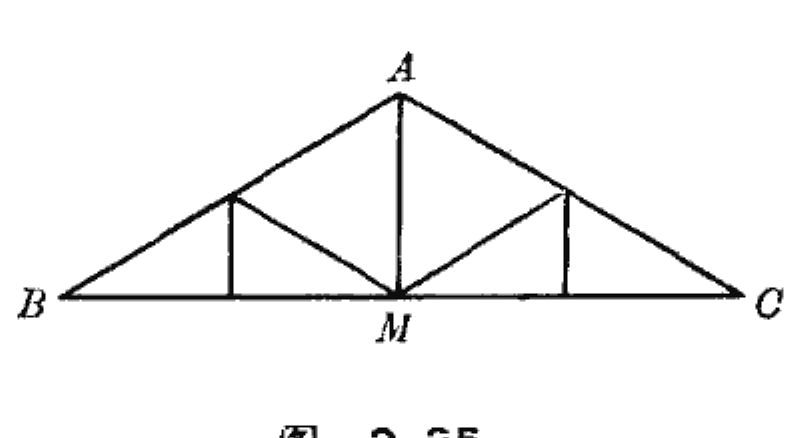


图 2-25

$$BM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 4=2.$$

在直角三角形 ABM 中，由勾股定理得

$$AB=\sqrt{BM^2+AM^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}\approx 2.24,$$

所以屋架上弦 AB 的长约为 2.24 米.

［例 9］ 若等腰直角三角形的直角边边长是 L，求底角的度数和斜边边长.

解：如图 2-26，$\angle C=90^\circ$，$AC=BC=L$.

因为等腰三角形的底角相等，

$$\therefore \quad \angle A=\angle B.$$

图 2-26

又 $\quad \angle A+\angle B=90^\circ$（直角三角形两锐角互余），

$$\therefore \quad \angle A=\angle B=45^\circ.$$

由勾股定理得

$$AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{L^2+L^2}=\sqrt{2L^2}=\sqrt{2}\,L.$$

由此可知，在锐角等于 45° 的直角三角形中，斜边边长是直角边边长的 $\sqrt{2}$ 倍.

三边相等的三角形叫做等边三角形.

［例 10］ 证明顶角是 60° 的等腰三角形是等边三角形.

已知：在 $\triangle ABC$ 中（图 2-27），$AB=AC$，$\angle A=60°$．

求证：$AB=BC=AC$．

证明：因为 $\angle A=60°$，

$\therefore \quad \angle B+\angle C=120°$．

又

$$\angle B=\angle C$$

（等腰三角形两底角相等），

$\therefore \quad \angle B=\angle C=60°$．

图 2-27

$$\therefore \quad \angle C=\angle A,$$

$AB=BC$（两角相等的三角形是等腰三角形），

因此

$$AB=BC=AC.$$

由此可得等边三角形的性质：等边三角形三个内角都相等且都等于 60°．

反之，如果一个三角形的三个内角都是 60°，它就是等边三角形．

从等边三角形 ABC 的顶点 A 作 $\angle A$ 的平分线 AD（图 2-28），则 $\angle BAD=30°$，且 AD 垂直平分底边 BC，于是

$$BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB.$$

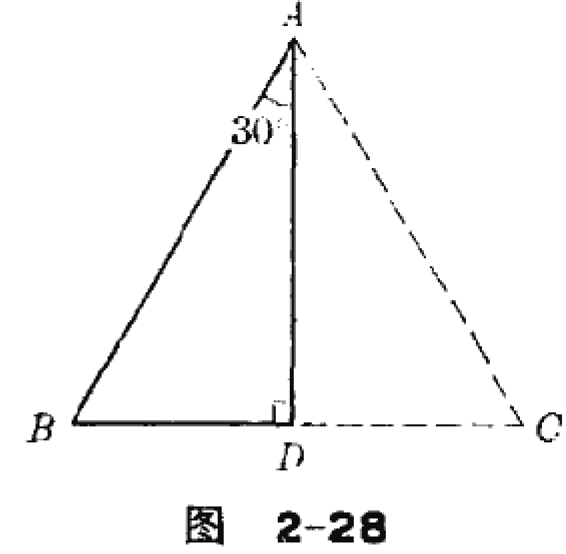


图 2-28

因此我们得到下述的直角三角形性质：在一个角等于 30° 的直角三角形中，30° 角所对的直角边等于斜边的一半．

下面我们介绍有关点的轨迹的概念．先看一个例题．

[例 11] 证明

(1) 线段的垂直平分线上任意一点到这线段两端距

离相等；

(2) 到一条线段的两端距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上.

分别证明如下：

(1) 已知：AB 是一线段，MN 是 AB 的垂直平分线，交 AB 于 C（图 2-29），P 是 MN 上的任意一点.

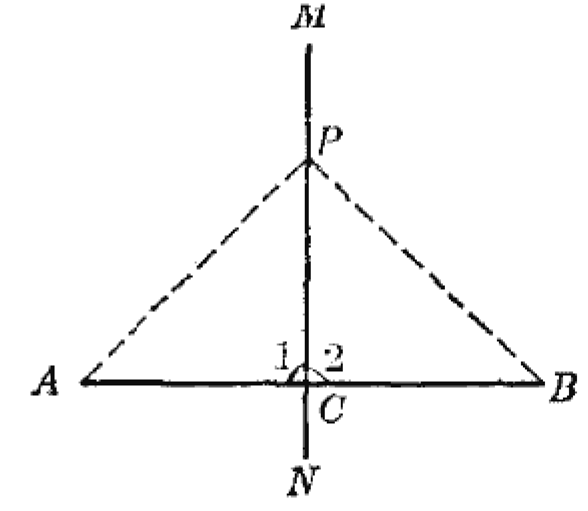


图 2-29

求证：$PA=PB$.

证明： ∵ $\triangle PAC\cong\triangle PBC$（边、角、边），

∴ $PA=PB$（全等三角形的对应边相等）；

(2) 已知：AB 是一线段，P 是 AB 外任意一点，$PA=PB$.

求证：P 点在 AB 的垂直平分线上.

证明：过 P 作 $MN\perp AB$ 交 AB 于 C（图 2-29），

∵ $PA=PB$,

∴ $\triangle PAB$ 是等腰三角形，

于是，PC 是等腰三角形底边上的高.

因为等腰三角形底边上的高就是底边上的中线，

∴ $AC=CB$,

所以，MN 是 AB 的垂直平分线，即 P 在 AB 的垂直平分线上.

由例 11 可以看出，如果 MN 是线段 AB 的垂直平分线，那末 MN 上任意一点都符合“到 A、B 两点距离相等”这个条件；另一方面，凡是符合这个条件的所有的点都在 MN 上. 可见，MN 是由符合“到 A、B 两点距离相等”这个条件的所有的点组成的.

用运动的观点来看，线段 AB 的垂直平分线 MN 可以看

成是一个动点按照一定条件运动所描绘出来的图形，这个条件就是动点在运动过程中始终和线段的两端距离相等.

我们把动点按一定条件运动所描绘出来的图形叫做具有这种条件的点的轨迹.

具有某种条件的点的轨迹应满足两方面的要求：

(1) 在轨迹上的点都符合这个条件；

(2) 符合这个条件的点都在轨迹上.

因此可以说：到线段两端等距离的点的轨迹是这条线段的垂直平分线.

又如，到一只角两边等距离的点的轨迹是这只角的平分线，因为一方面，角的平分线上任意一点到角的两边距离相等；另一方面，到角的两边距离相等的所有点都在这平分线上.

又如，到定点 O 的距离等于定长 R 的点的轨迹是以 O 为圆心以 R 为半径的圆，因为一方面，圆上任意一点到圆心 O 的距离都等于 R；另一方面，到圆心 O 的距离等于 R 的所有点都在圆上.

小　　结

1. 全等三角形的判定：

(1) 三边对应相等的两个三角形全等(边、边、边)；

(2) 两边和夹角对应相等的两个三角形全等(边、角、边)；

(3) 两角和夹边对应相等的两个三角形全等(角、边、角)，

推论：两角和其中一角的对边对应相等的两个三角形全等；

(4) 斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等(见 48 页习题 2).

2. 平行四边形:

(1) 平行四边形对边相等,对角线互相平分;

(2) 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形 (见 49 页习题 8);

(3) 平行四边形是中心对称图形.

3. 中位线:

(1) 三角形的中位线平行于底边且等于底边的一半;

(2) 梯形中位线平行于上、下底且等于上、下底之和的一半.

4. 等腰三角形:

(1) 等腰三角形的顶角平分线垂直平分底边;

(2) 等腰三角形两底角相等;

(3) 等腰三角形是轴对称图形.

5. 轨迹:

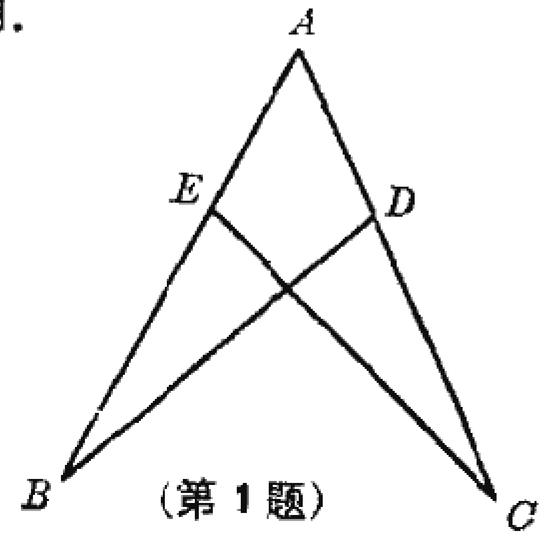
(1) 到线段两端距离相等的点的轨迹是线段的中垂线;

(2) 到角的两边距离相等的点的轨迹是角的平分线;

(3) 到一定点的距离等于定长的点的轨迹是以定点为圆心定长为半径的圆.

习　　题

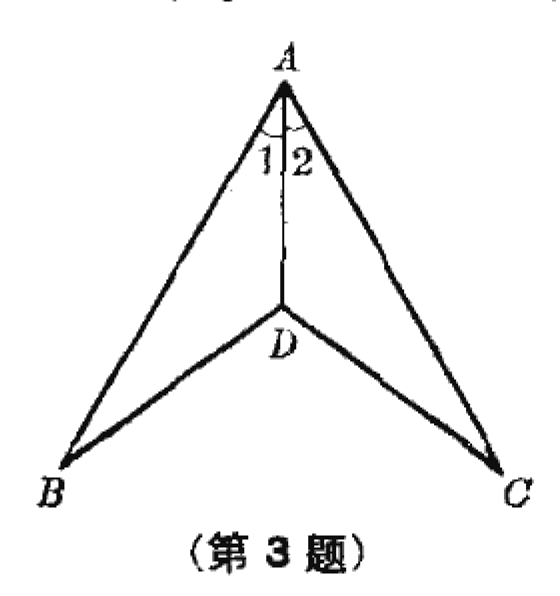
1. 已知 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$, $\angle B = \angle C$, 指出 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 的所有对应边和对应角.



(第 1 题)

2. 证明斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等.

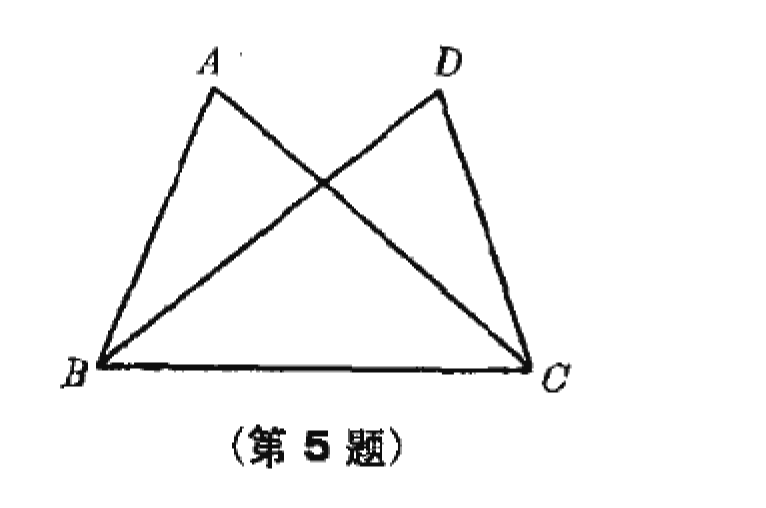
3. 已知 $AB=AC$, $\angle 1=\angle 2$, 求证 $\angle B=\angle C$.



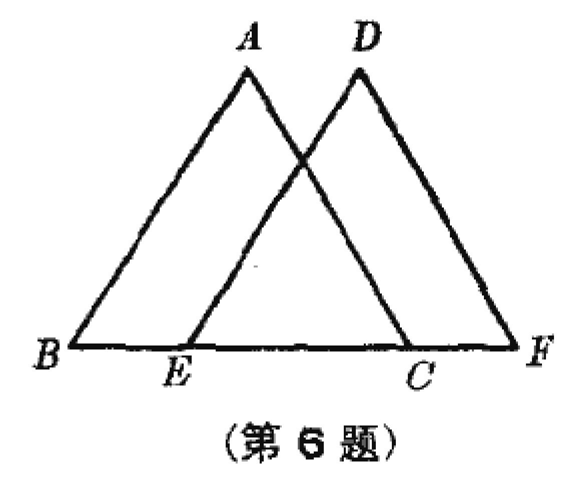
(第 3 题)

4. 证明矩形的对角线相等.

5. 已知 $\angle ACB=\angle DBC$, $AC=DB$, 求证 $\angle A=\angle D$.



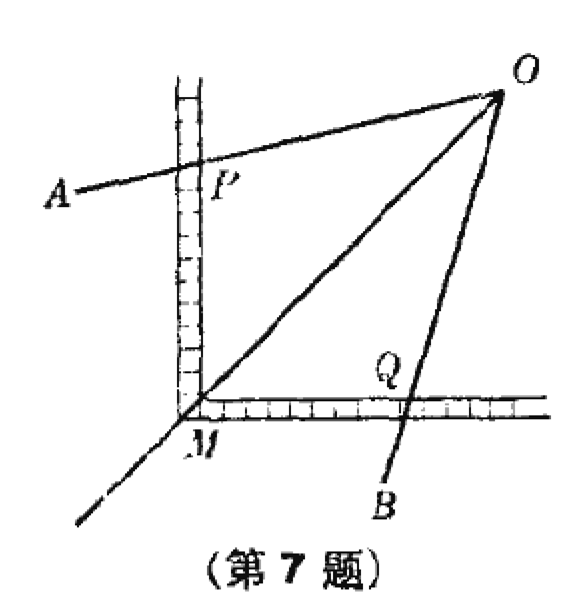
(第 5 题)



(第 6 题)

6. 已知 $AB\parallel DE$, $AC\parallel DF$, $BE=CF$, 求证 $AB=DE$, $AC=DF$.

7. 用角尺平分任意 $\angle AOB$, 可先在 $\angle AOB$ 的两边 OA, OB 上量出相等的线段 OP, OQ, 再移动角尺, 使角尺两边上相同刻度的点分别和 P、Q 重合, 试证明这时经过角尺顶点 M 的射线就是 $\angle AOB$ 的平分线.



(第 7 题)

8. 证明：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

9. 证明：两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

10. 钻工要在某机械零件上钻四个等距离的孔．使这四个孔在同一直线上，问当第一孔与第四孔的中心位置已定时，如何定其余两个孔的中心位置？

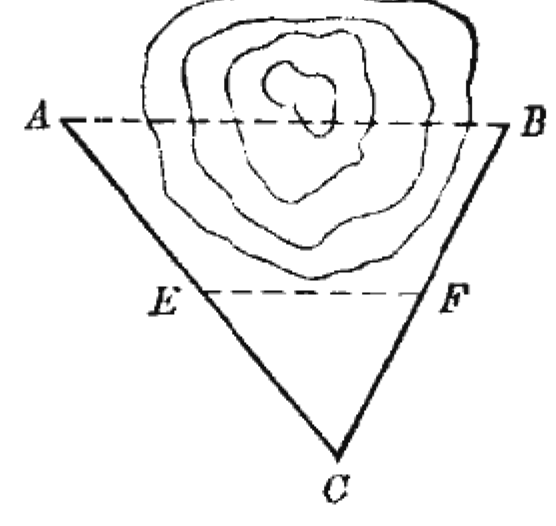
11. 已知 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC，AC，AB 的中点，求证四边形 $BDEF$ 是平行四边形.

12. 已知 O 为平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线的交点，E、F、G、H 分别为 AO、BO、CO、DO 的中点，求证四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

13. 试举出三个中心对称图形的实例.

14. 两腰相等的梯形叫等腰梯形，试证明等腰梯形的两底角相等.

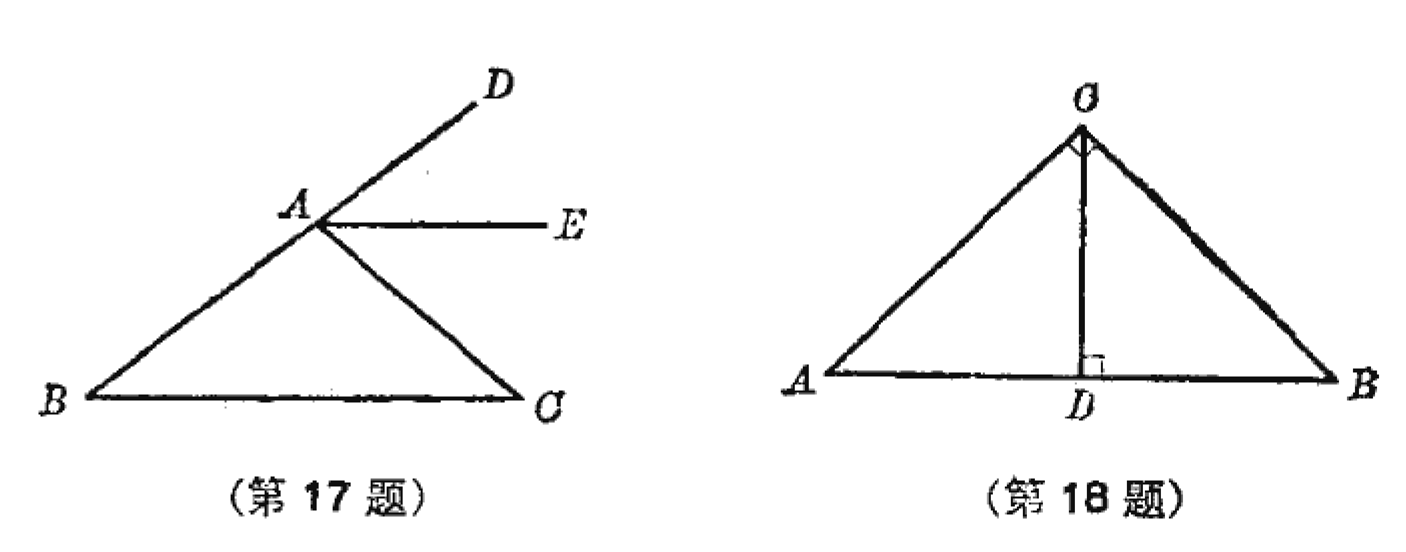
15. 要测量池塘两端的距离 AB，只要在池塘外面选择一点 C，连接 AC、BC，再量得 AC、BC 的中点连线 EF 的长度就知道 AB 的距离，为什么？



(第 15 题)

16. 证明等腰三角形两腰上的中线相等.

17. 如图，已知 AE 为三角形 ABC 的外角 $\angle DAC$ 的平分线，且 $AE \parallel BC$，求证 $AB=AC$.



(第 17 题)　　(第 18 题)

18. 如图，屋架 ABC 为等腰直角三角形，$\angle C=90°$，$CD \perp AB$，若 $AB=12$ 米，求 CD.

19. (1) 已知等腰三角形的底边长为 a，高为 h，求腰的长；

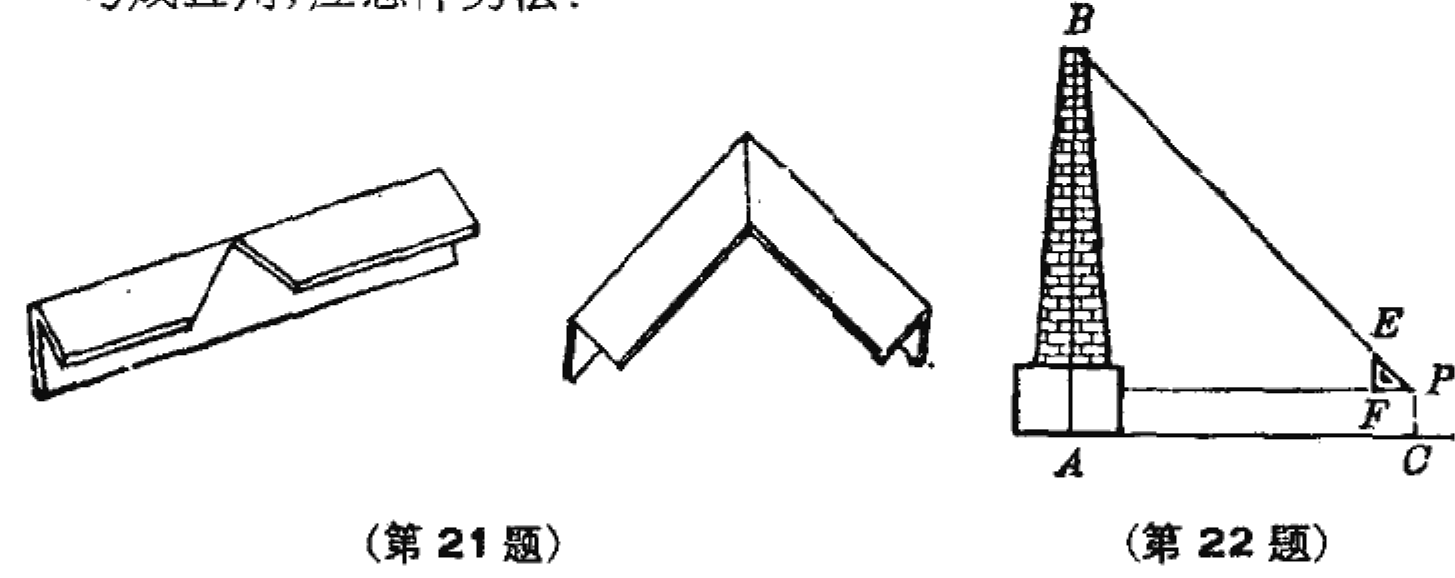
(2) 已知等边三角形的高为 h，求它的边长；

(3) 已知一直角三角形的一个角为 $60°$，斜边长为 a，求 $60°$ 角所对的直角边长；

(4) 已知六角螺母的边长为 a，求它的对边距.

20. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 是底边 BC 上的中线，$\angle B=50°$，求 $\angle CAD$.

21. 在角铁的一个面上，剪掉一个角，就可以弯成一个角度．要把角铁弯成直角，应怎样剪法？



(第 21 题)　　(第 22 题)

22. 用一块 $45°$ 的三角板测量烟囱．测量者站在 C 处，将三角板的直角边 EF 放成铅直位置，使沿着斜边 PE 看过去正好看到烟囱顶点 B，这样，烟囱高 $AB=AC+PC$，为什么？

23. 举出三个轴对称图形的实例.

24. (1) 已知 $\triangle ABC$ 为钝角三角形，$\angle C$ 为钝角，画出 BC、AC 边上的高；

(2) $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'BC$ 是两个同底的三角形，它们的顶点在底边 BC 的同侧．MN 是过它们的顶点 A、A' 的直线，已知 $MN\parallel BC$，求证 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'BC$ 面积相等（同底等高的两三角形面积相等）；

(3) 已知 D 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上任一点，求证

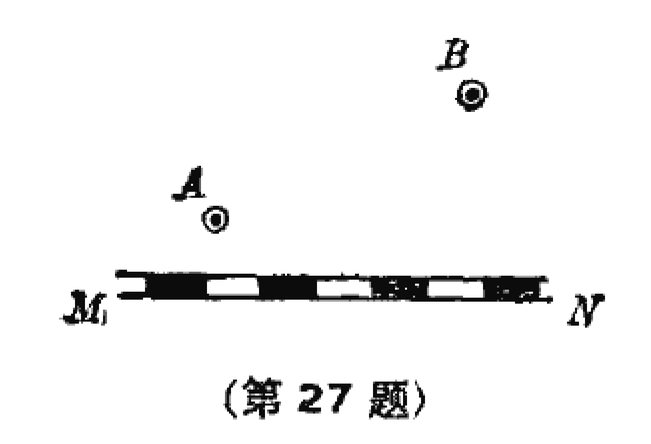
$$\frac{\triangle ABD\text{ 面积}}{\triangle ADC\text{ 面积}}=\frac{BD}{DC}$$

（等高的两个三角形面积之比等于它们底边的比）.

25. 在 $\triangle ABC$ 中，O 是 AB 边的垂直平分线与 AC 边的垂直平分线的交点，求证 O 点也在 BC 边的垂直平分线上.

26. C、D 是线段 AB 的垂直平分线上的两点. 求证: $\angle CAD=\angle CBD$.

27. 在铁路 MN 的一旁有 A 和 B 两个工厂, 要在铁路近旁修建一个货仓,使它与 A、B 两厂的距离相等,应怎样确定这个货仓的位置.



(第 27 题)

第三节 相似三角形

一、相似三角形的判定

我们经常看到各种形状相同的图形,如国旗上的大、小五角星;不同规格的六角螺丝帽;用不同比例尺绘制的同一机械零件图和地图等.

形状相同的图形之间具有哪些内在联系呢? 为了弄清这个问题,我们把图 2-30 (甲)中用不同比例尺绘成的顶尖零件图中的两个三角形抽出来作比较 (图 2-30 (乙)), 不难看出,这两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 有以下联系:

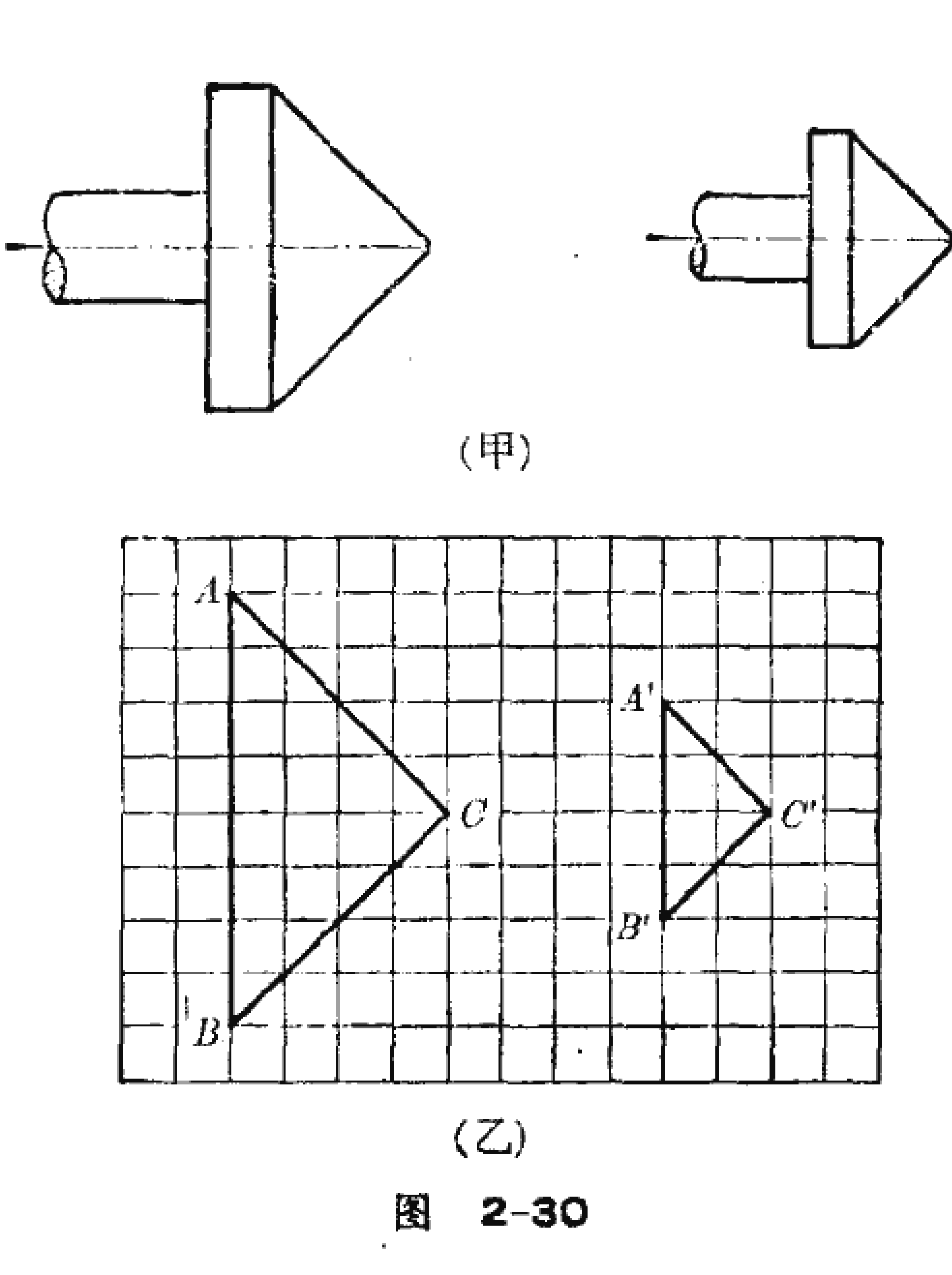
(1) $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$;

(2) $AB=2A'B'$, $BC=2B'C'$, $AC=2A'C'$,

即

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=2.$$

这就是说,形状相同的两个三角形,实质上就是三个角都对应相等,三条边都对应成比例的两个三角形. 这里,我们把**彼此相等的角叫做对应角,对应角所对的边叫做对应边.**



(甲)

(乙)

图 2-30

定义 对应角都相等，对应边都成比例的两个三角形叫做相似三角形．两个相似三角形对应边的比叫做相似比．

通常用记号"～"表示相似，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似就记作

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

很明显，当两个相似三角形的相似比等于1时，这两个三角形就是全等三角形，可见全等三角形不过是相似三角形的一种特殊情况．

由此可以推出，形状相似的两个多边形实质上也就是对应角都相等、对应边都成比例的两个多边形．在生产实践中，各种工程图的放大或缩小，都是按照以上两个条件来保证形状不变的．

在绘图、测量和计算等工作中，经常要用到相似三角形的

性质，因此必须掌握判定两个三角形相似的方法．判定两个三角形相似与判定两个三角形全等相仿，并不一定要知道所有的对应角都相等，对应边都成比例，只要知道某些边、角的对应关系就可以了．

在推导判定定理之前，先证明下面的定理．

定理 平行于三角形一边的直线截其他两边，截得的对应线段成比例．

已知 $\triangle ABC$中，$DE \parallel BC$，交 AB 于 D，交 AC 于 E．

求证 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$．

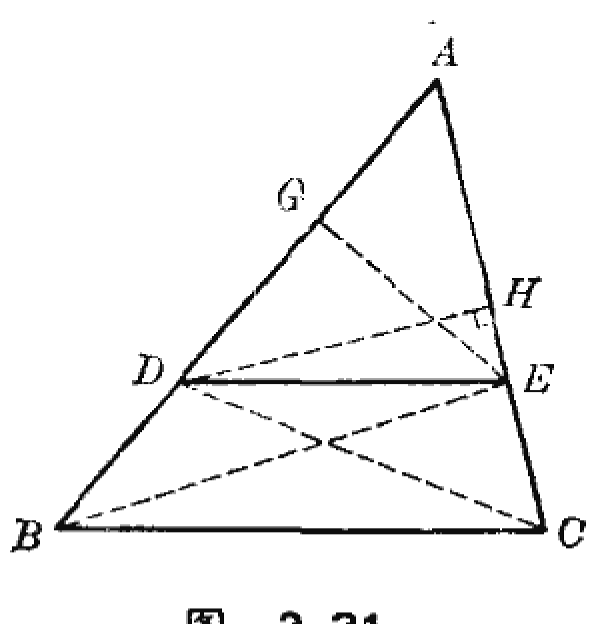


图 2-31

证明 作 $EG \perp AB$，$DH \perp AC$ (图 2-31)，连 BE 和 CD，于是

$$\frac{\triangle ADE\text{ 面积}}{\triangle DBE\text{ 面积}}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot EG}{\frac{1}{2}DB\cdot EG}=\frac{AD}{DB},$$

$$\frac{\triangle ADE\text{ 面积}}{\triangle EDC\text{ 面积}}=\frac{\frac{1}{2}AE\cdot DH}{\frac{1}{2}EC\cdot DH}=\frac{AE}{EC}.$$

因为 $\triangle DBE$ 与 $\triangle EDC$ 同底等高，而三角形面积等于底乘高的一半．

$$\therefore\quad \triangle DBE\text{ 面积}=\triangle EDC\text{ 面积},$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle ADE\text{ 面积}}{\triangle DBE\text{ 面积}}=\frac{\triangle ADE\text{ 面积}}{\triangle EDC\text{ 面积}},$$

$$\therefore\quad \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

由上面所得的结果，应用比例的性质还可以推出下面两个等式：

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE};\quad \frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}.$$

这里证明第一式.

$\because\quad \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC},\quad \therefore\quad \frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$ (由反比性质),

$\therefore\quad \frac{AD+DB}{AD}=\frac{AE+EC}{AE}$ (由合比性质),

即

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}.$$

同样可以推证

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}.$$

由这个定理可以推得：两直线被一组平行线所截，截得的对应线段成比例.

判定定理 1 如果两个三角形有两个角对应相等，则这两个三角形相似.

已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$ (图 2-32).

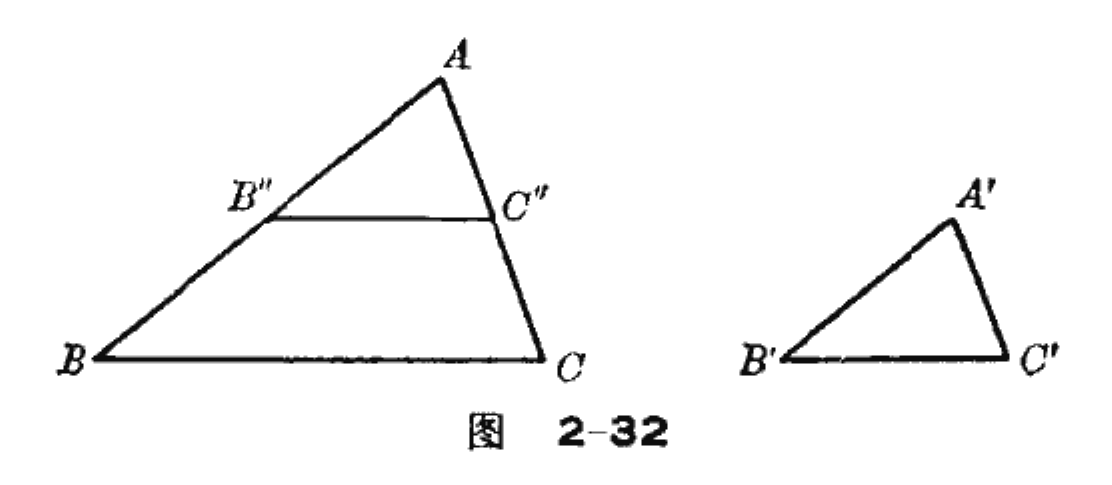


图 2-32

求证 $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$.

证明 很明显，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三个角都对应相

等. 下面证明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三条边都对应成比例.

在 AB 上截取 $AB''=A'B'$, 过 B'' 作直线 $B''C''$ 交 AC 于 C'', 使得 $\angle AB''C''=\angle B'$. 因为 $\angle A=\angle A'$,

$$\therefore \quad \triangle AB''C''\cong\triangle A'B'C' \text{ (角、边、角)}$$

$$\therefore \quad AC''=A'C'.$$

$$\because \quad B''C''\parallel BC \text{ (由 } \angle AB''C''=\angle B'=\angle B\text{)},$$

$$\therefore \quad \frac{AB''}{AB}=\frac{AC''}{AC} \text{ (上面的定理)},$$

即

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}.$$

同理可证

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}.$$

于是

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A'}{CA},$$

$$\therefore \quad \triangle ABC\sim\triangle A'B'C'.$$

用类似的方法可以证明下面两个判定定理.

判定定理 2 如果两个三角形两边对应成比例, 并且夹角相等,则这两个三角形相似.

判定定理 3 如果两个三角形三边对应成比例, 则这两个三角形相似.

二、应用举例

[例 1] 利用影长测高. 如测得烟囱的影长为 19.4 米, 标杆的影长为 2 米, 已知标杆长 4 米, 求烟囱的高(图 2-33).

解: 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, 因为烟囱和标杆都垂直于地面,

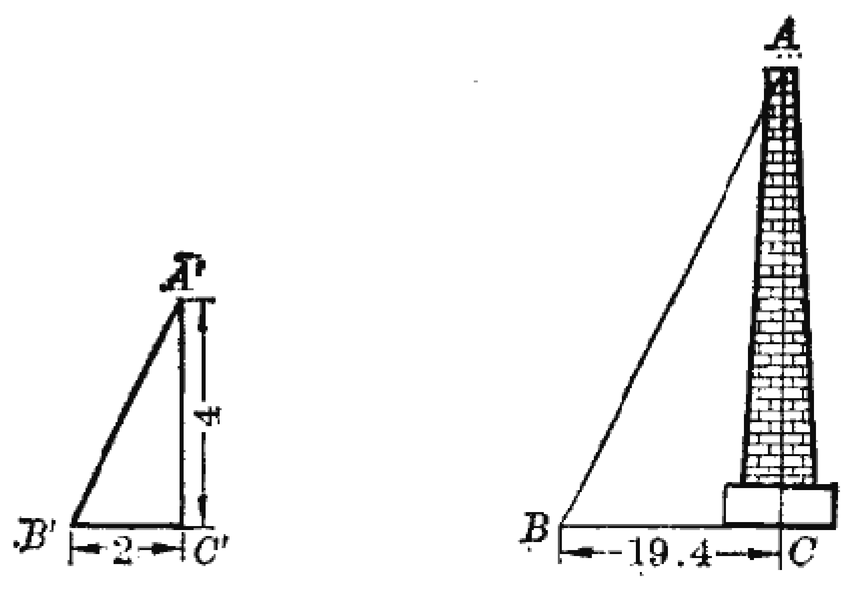


图 2-33

$$\therefore \quad \angle C=\angle C'=90^\circ.$$

又因为太阳光线是平行照射的，在同一时刻与地面所成的角处处相等，

$$\therefore \quad \angle B=\angle B'.$$

$$\therefore \quad \triangle ABC\sim\triangle A'B'C' \text{（判定定理 1）},$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \text{（相似三角形的对应边成比例）},$$

即

$$\frac{AC}{4}=\frac{19.4}{2}, \quad AC=\frac{19.4}{2}\times 4=38.8.$$

由此得知，烟囱高为 38.8 米.

[例 2] 屋架的结构如图 2-34，中间等距离地设置 5 根直腹杆，每两根直腹杆之间又有斜腹杆. 已知屋架的跨度 BC 是 12 米，高度 AD 是 3 米，求其他四根直腹杆的长度.

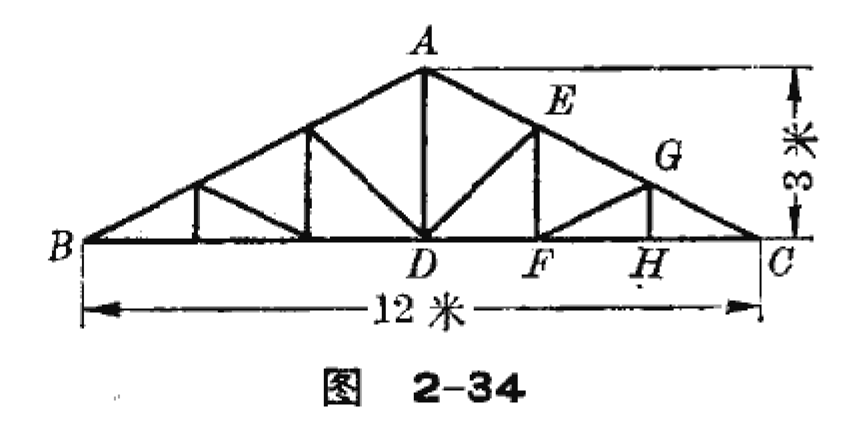


图 2-34

解：屋架是以 AD 为轴的对称图形，只要求出两根直腹杆 EF、GH 的长度，那末与其对称的两根直腹杆的长度也就知道了.

由题设可知

$$DF=FH=HC=\frac{12}{6}=2\ (\text{米}).$$

在$\triangle ADC$，$\triangle EFC$和$\triangle GHC$中，因为AD、EF、GH都垂直于BC，

$$\therefore\quad \angle ADC=\angle EFC=\angle GHC=90^\circ.$$

$\angle C$为公共角，

$$\therefore\quad \triangle ADC\sim\triangle EFC\sim\triangle GHC\ (\text{判定定理 1}),$$

$$\therefore\quad \frac{EF}{AD}=\frac{FC}{DC}\ (\text{相似三角形的对应边成比例}),$$

即

$$\frac{EF}{3}=\frac{4}{6},\quad EF=2\ (\text{米}).$$

同理

$$\frac{GH}{AD}=\frac{HC}{DC},$$

即

$$\frac{GH}{3}=\frac{2}{6},\quad GH=1\ (\text{米}).$$

所以，直腹杆EF、GH的长分别为2米和1米.

[例3] 比例规是由两根等长的金属杆交叉构成的一种绘图工具，利用它可以放大或缩小线段，金属杆上有螺丝用来固定两杆交点的位置.

如图2-35，要作一条线段使它等于已知线段l的$\frac{1}{3}$，只要把比例规的螺丝固定在O点，使$OA=3OD$，$OB=3OC$，然后把两脚张开，使脚尖A、B之间的距离等于l，再以C、D两脚尖为端点作一条线段，它的长度就是l的$\frac{1}{3}$，为什么？

证：在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中，

$$\frac{OD}{OA}=\frac{OC}{OB}=\frac{1}{3},$$

$$\angle 1=\angle 2 \text{（对顶角相等），}$$

$$\therefore \quad \triangle COD\sim\triangle BOA \text{（判定定理 2），}$$

$$\therefore \quad \frac{CD}{AB}=\frac{OD}{OA} \text{（相似三角形的对应边成比例），}$$

即

$$\frac{CD}{l}=\frac{1}{3}, \quad CD=\frac{1}{3}l.$$

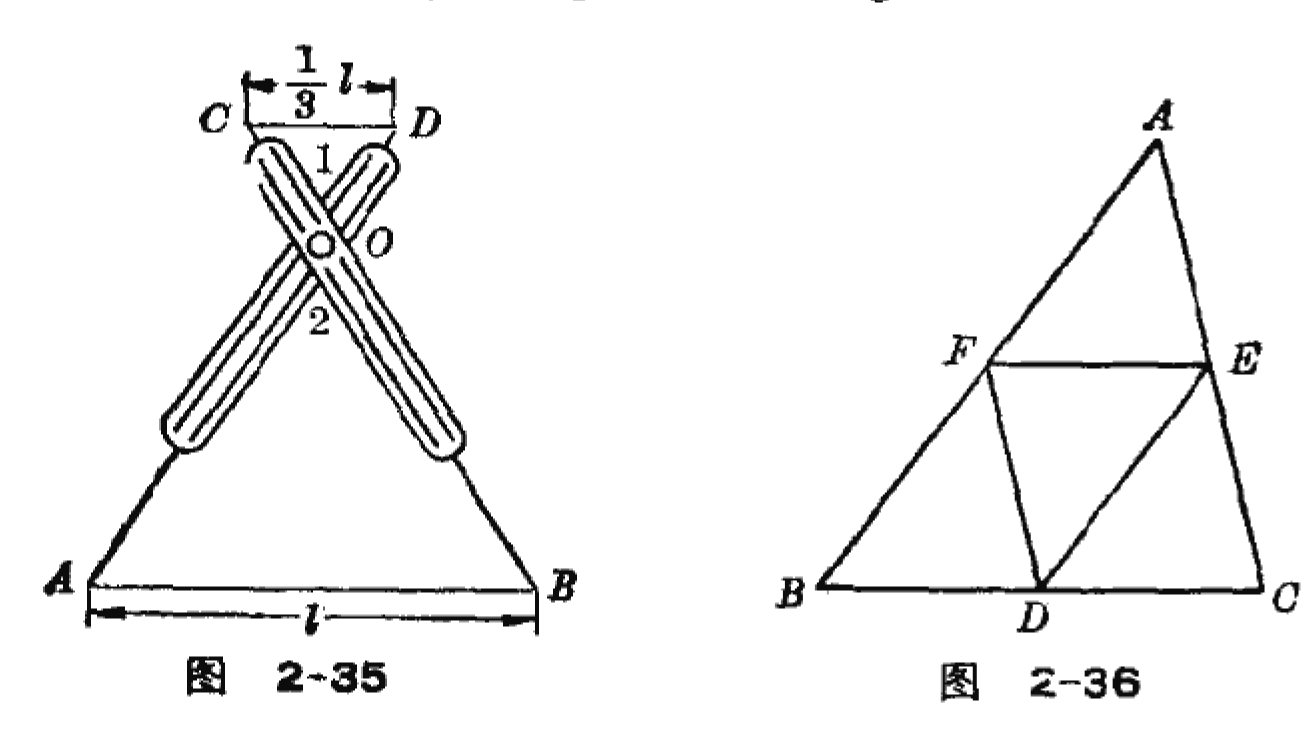


图 2-35　　图 2-36

［例 4］ 证明连接三角形三边中点所成的三角形和原三角形相似.

已知：在 $\triangle ABC$ 中，D、E、F 分别是 BC、AC、AB 的中点(图 2-36).

求证：$\triangle DEF\sim\triangle ABC$.

证明：$\because \quad DE=\frac{1}{2}AB,\ DF=\frac{1}{2}AC,\ EF=\frac{1}{2}BC$

（三角形中位线性质），

$$\therefore \quad \frac{DE}{AB}=\frac{DF}{AC}=\frac{EF}{BC}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \quad \triangle DEF\sim\triangle ABC \text{（判定定理 3）.}$$

［例 5］ 贫下中农测量堤坝的高度，常用下述方法：将直尺 DE 的一端 E 抵住堤坝边(图 2-37)，使直尺水平(可置气泡水准仪使气泡居中)，在另一端 D 吊一重锤，使锤尖刚刚触及坡边，然后量出吊线 DF、坡边长 AC 和尺端 E 到锤尖 F 的长 EF，则

$$堤坝高=\frac{坡边长\times吊线长}{尺端到锤尖长},$$

为什么？

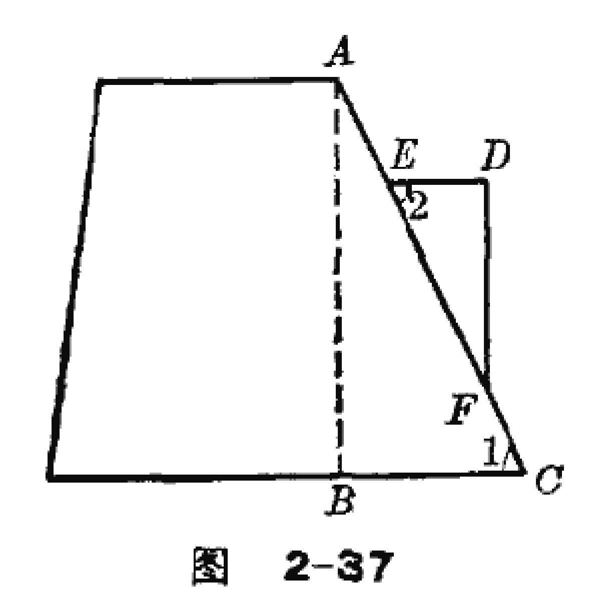


图 2-37

证：堤坝的横截面是一个梯形，过 A 引梯形下底的垂线 AB 交下底于 B，AB 就是堤坝的高.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle FDE$ 中，

$$\because\quad AB\perp BC,\quad ED\perp DF,$$

$$\therefore\quad \angle ABC=\angle FDE=90^\circ.$$

又因 $ED\parallel BC$，

$$\therefore\quad \angle 1=\angle 2\ (内错角相等),$$

$$\therefore\quad \triangle ABC\sim\triangle FDE\ (判定定理 1).$$

$$\therefore\quad \frac{AB}{DF}=\frac{AC}{EF}\ (相似三角形的对应边成比例),$$

$$\therefore\quad AB=\frac{AC\times DF}{EF},$$

即

$$堤坝高=\frac{坡边长\times吊线长}{尺端到锤尖长}.$$

两个相似三角形除对应边成比例以外，还可以证明它们的对应高的比、对应中线的比和对应角平分线的比都等于相似比，也就是两个相似三角形的对应线段成比例.

［例 6］ 把一块截面为三角形的废料改做成截面为正方

形的零件，如图 2-38，使正方形的一边在 BC 上，两个顶点分别在 AB、AC 上，已知 BC 长 120 毫米，高 AD 为 80 毫米，求正方形边长.

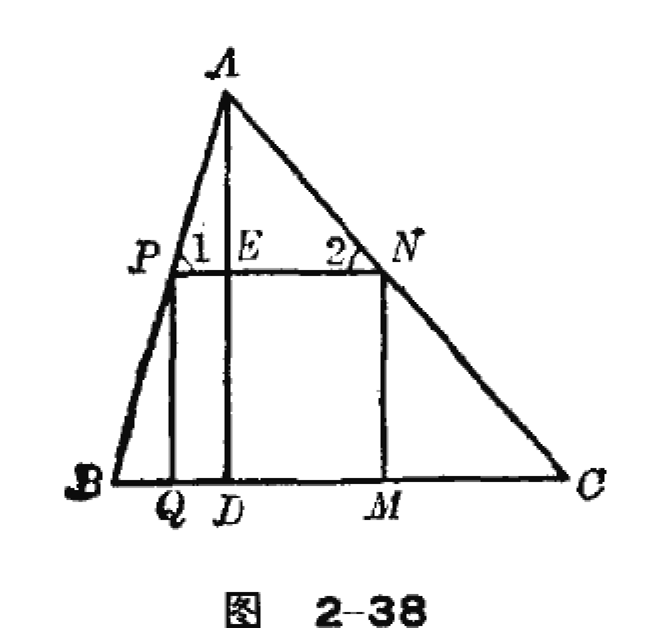


图 2-38

解：设图中四边形 $PQMN$ 是所求的正方形.

AD 与 PN 相交于 E,

$\because \quad PN \parallel BC$,

$\therefore \quad \triangle APN \sim \triangle ABC$.

又 AE, AD 分别为 $\triangle APN$, $\triangle ABC$ 的对应边上的高,

$\therefore \quad \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{PN}{BC}$（相似三角形对应高的比等于相似比）.

设正方形边长为 x 毫米，则

$$AE=AD-ED=80-x,$$

$$\therefore \quad \frac{80-x}{80}=\frac{x}{120}.$$

解上式得

$$x=48.$$

即所求正方形的边长为 48 毫米.

小　　结

1. 相似三角形的判定：

(1) 两只角对应相等的两个三角形相似；

(2) 两边对应成比例、夹角相等的两个三角形相似；

(3) 三边对应成比例的两个三角形相似.

2. 相似三角形的性质：

相似三角形对应线段的比等于相似比.

习　　题

1. 下面的说法对吗？为什么？

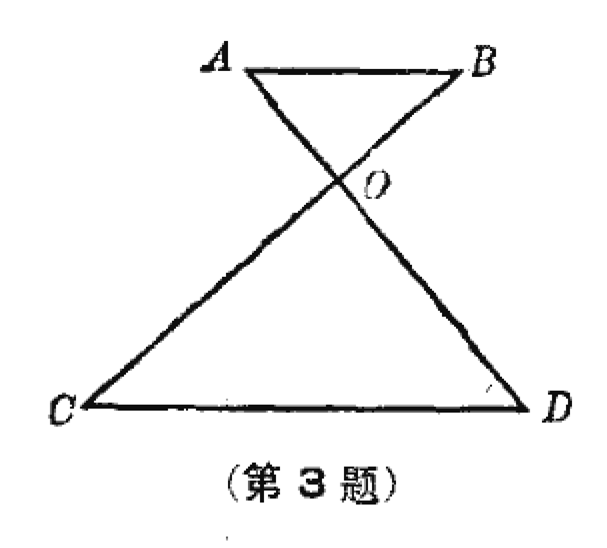
   (1) 所有的等边三角形都相似；

   (2) 所有的等腰三角形都相似；

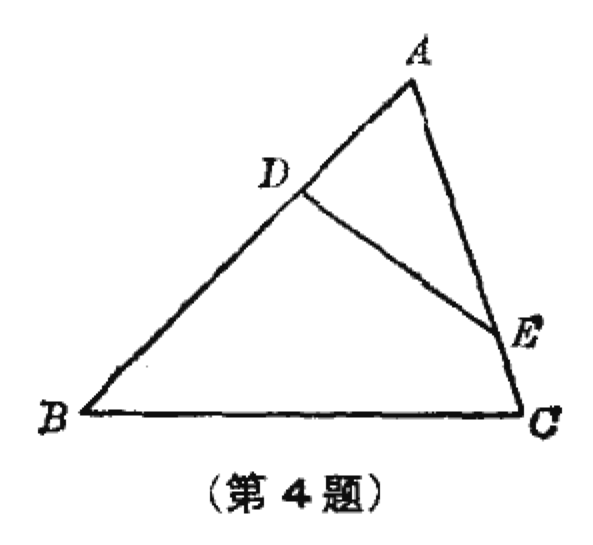
   (3) 所有的等腰直角三角形都相似.

2. 对照三角形相似的判定定理，说明判定直角三角形相似的条件.

3. 如图，已知 $\triangle ABO \sim \triangle DCO$，而且 $\angle A=\angle D$，写出所有的对应角和对应边的比例式.



(第 3 题)

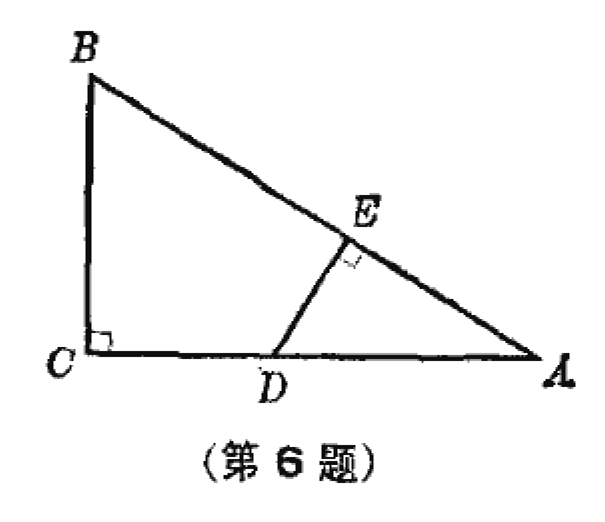


(第 4 题)

4. 如图，已知 $AD=2$ 厘米，$AE=3$ 厘米，$AB=6$ 厘米，$AC=4$ 厘米，问 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 是否相似？

5. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$AB=4$ 厘米，$BC=5$ 厘米，$CA=6$ 厘米，$A'B'C'$ 的最短边 $A'B'=3$ 厘米，求其余两边.

6. 如图，已知 $\angle C=90°$，$DE \perp AB$，求证 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.



(第 6 题)

7. AA'、BB' 两线段相交于 O，且 $AB \parallel A'B'$，

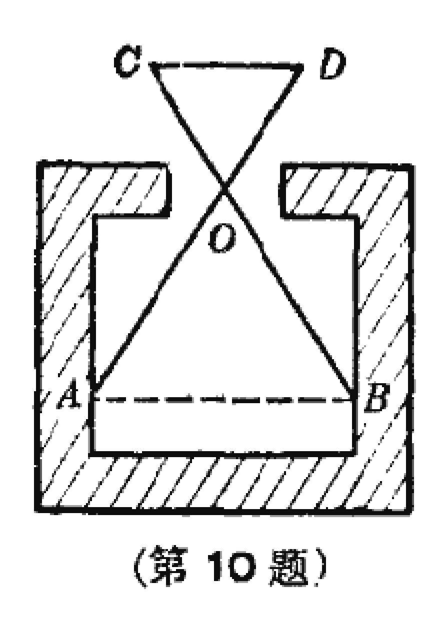
   (1) 若 $BO:OB'=1:2$，$A'B'=5$ 厘米，求 AB；

   (2) 若 $BO=2$ 厘米，$B'B=5.5$ 厘米，$AB=4$ 厘米，求 $A'B'$.

8. 在直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，从顶点 C 引 AB 的垂线交 AB 于 D，证明 $AC^2=AB\cdot AD$ 及 $BC^2=AB\cdot BD$.

9. 应用上题结果，证明勾股定理.

10. 用卡钳测量内孔直径，卡尺 AD 和 BC 相等，若 $\frac{CO}{BO}=\frac{DO}{AO}=\frac{1}{2}$，$CD=25$ 毫米，求内孔直径 AB.

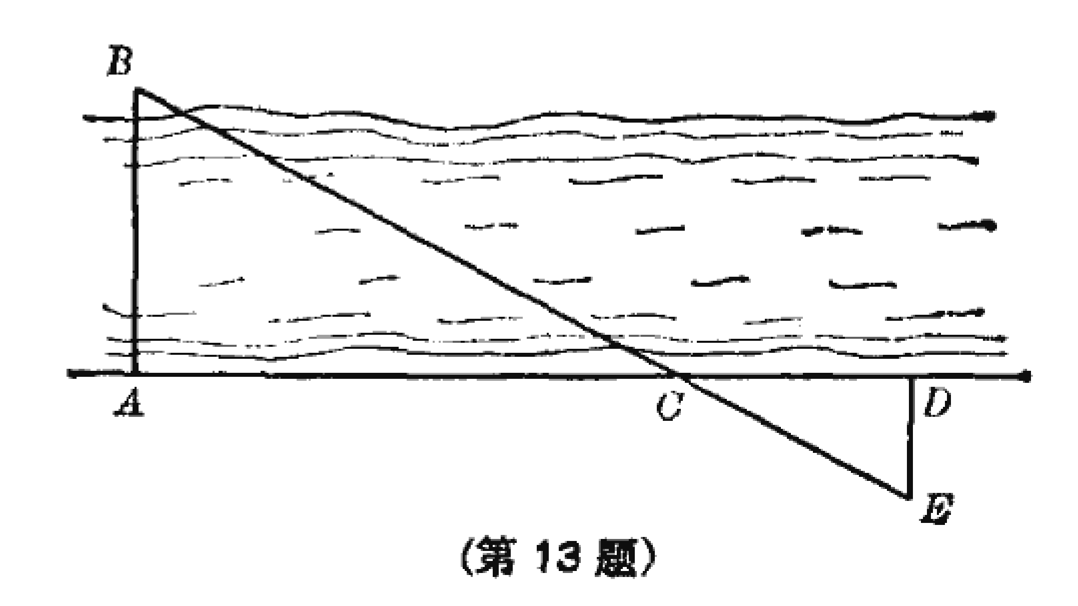


(第 10 题)

11. 已知杠杆的短臂是 0.75 米，长臂是 3.75 米，当短臂端点下降 0.5 米时，长臂的端点上升多少米？

12. 为测量楼房的高，在它附近立一根标杆，测得标杆影长 4 米，楼房影长 56 米，已知标杆长 2.5 米，求楼房的高度.

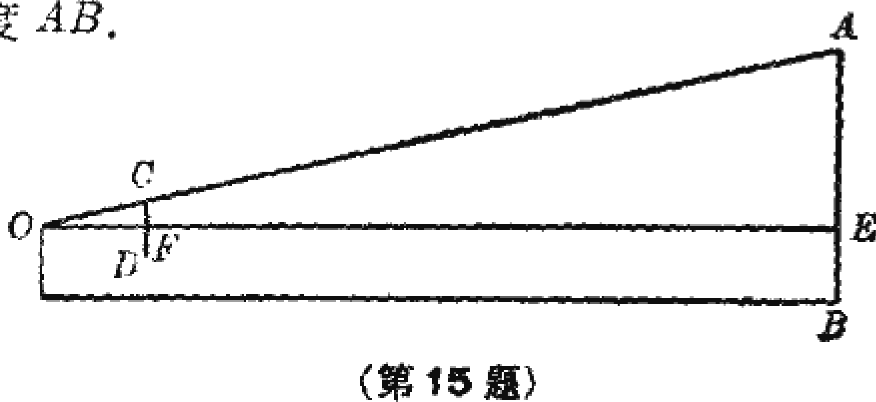
13. 要测量河宽 AB，如图，从 A 点沿着和 AB 垂直的方向走 100 步到 C 点，立一标杆，又走 40 步到 D 点，转一直角，如果再走 22 步到 E 点时，E、C、B 三点恰在一直线上，就能求出河的宽度 AB，为什么（每步以 0.75 米计算）？



(第 13 题)

14. 贫下中农在土地规划时需要知道中间隔有土墩的 A、B 两点间的距离，试用相似形原理提出一个测量方案.

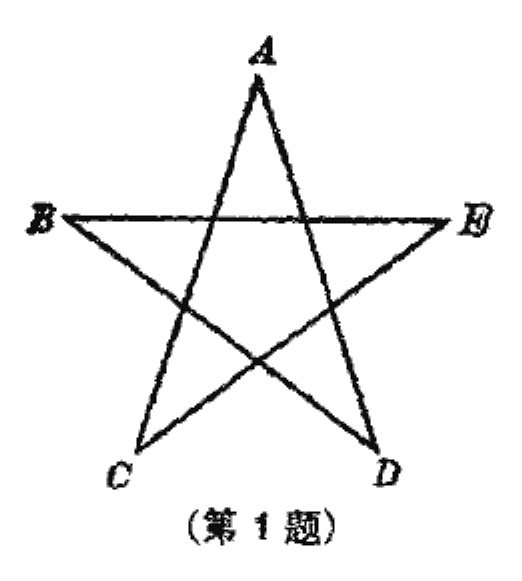
15. 腕测法是一种简单的测量物体高度的方法. 右手拿一根有刻度的直尺 CD，伸直右手臂，使直尺与要测的电杆 AB 平行，看直尺时，尺如以 12 厘米的长度 (CF) 恰好遮住目标. 已知目测者到电杆的距离 OE 是 30 米，臂长约 60 厘米，若观测点 O 距地面 1.6 米，求电杆高度 AB.



(第 15 题)

复 习 题

1. 下图为五角星，求证 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180°$.

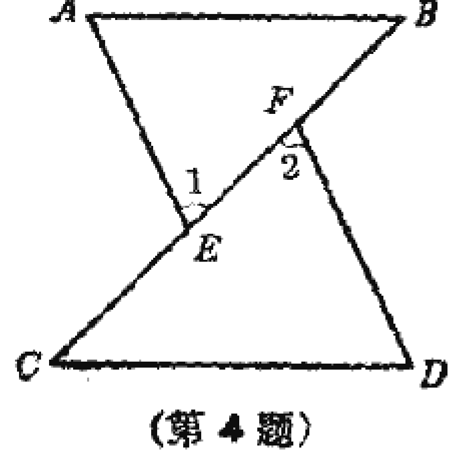


(第 1 题)

2. 在 $\triangle ABC$ 中，作 $BD\perp AC$ 交 AC 于 D. 作 $CE\perp AB$ 交 AB 于 E，$BD=CE$，求证 $AB=AC$.

3. $ABCD$ 是一个平行四边形，E、F 是对角线 BD 上的两点，若 $BE=DF$，求证 $\triangle ABE\cong\triangle CDF$.

4. 已知 $AB\parallel CD$，E、F 是 CB 上的两点，$CE=BF$，$\angle 1=\angle 2$，求证 $AB=CD$.



(第 4 题)

5. 已知 $ABCD$ 为平行四边形，在 AB、BC、CD、DA 上分别取 E、F、G、H，使 $AE=CG$，$BF=DH$，求证 $EFGH$

为平行四边形.

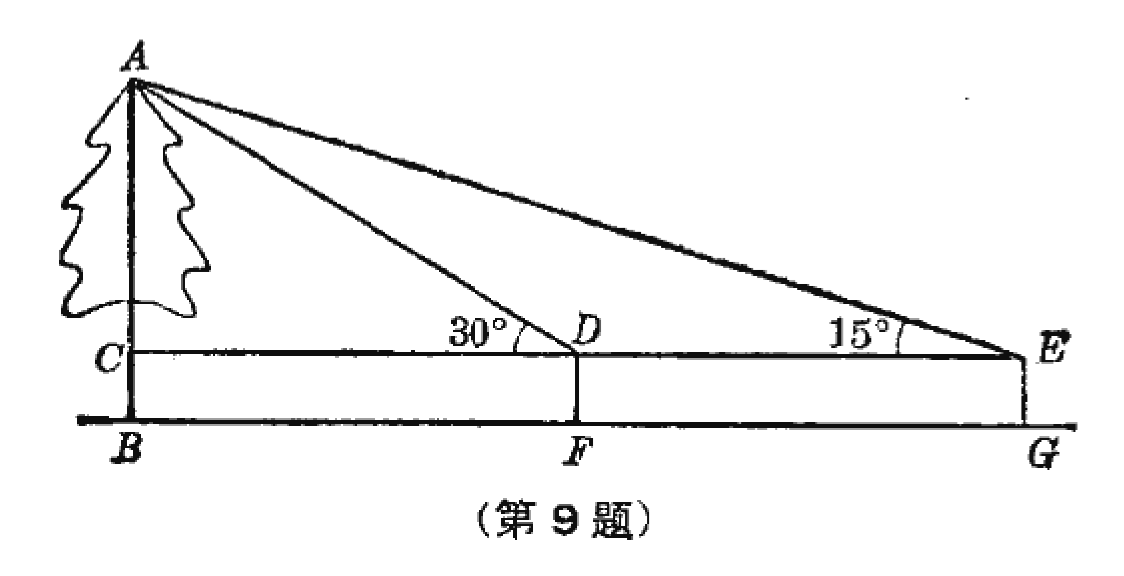
6. 等腰梯形的一腰长 2.5 厘米，中位线长 3 厘米，求等腰梯形的周长(两腰相等的梯形叫等腰梯形).

7. 在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC$，$\angle A=36°$，CD 平分 $\angle ACB$，求证 $\triangle BCD$ 是等腰三角形.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，D 是 AB 边的中点，且 $CD=\frac{1}{2}AB$，求证 $\angle ACB$ 是直角.

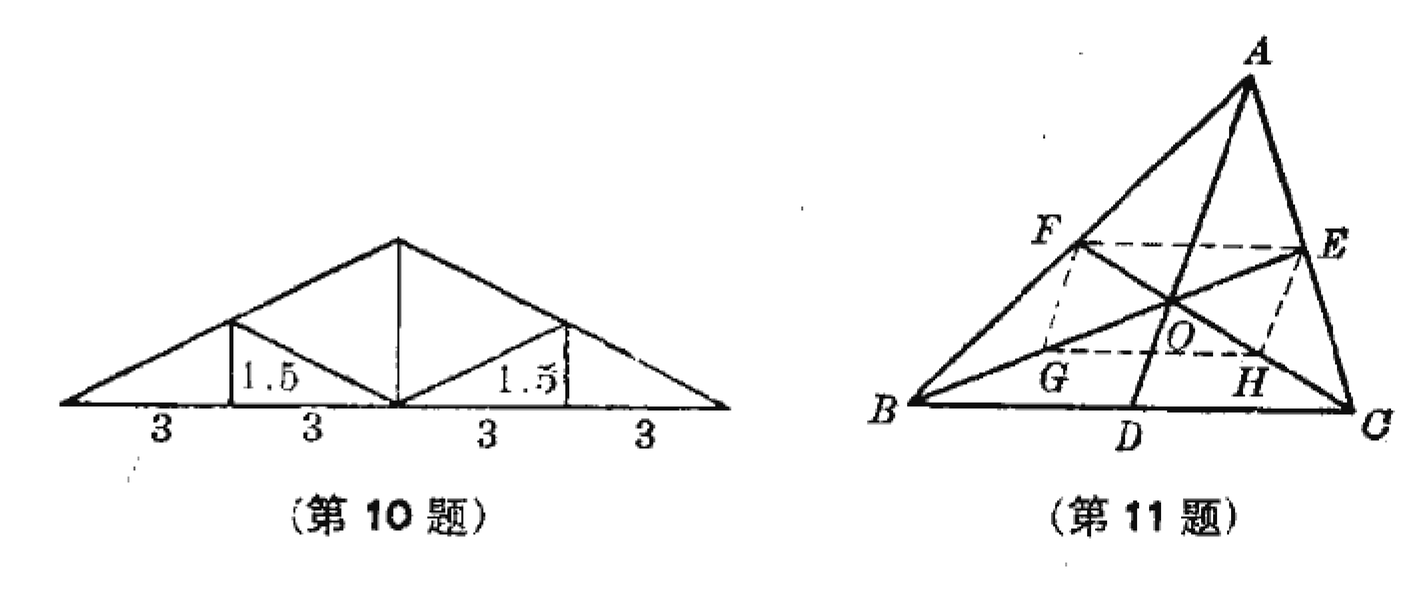
(第 7 题)

9. 如图测量树高 AB，可先在地面上找一点 G，使 $\angle AEC=15°$，再在 BG 方向上选择一点 F，使 $\angle ADC=30°$，若量出 FG 和 EG 分别为 16 米和 1.35 米，求树高.



(第 9 题)

10. 一个钢屋架的尺寸如图所示(单位是米)，求整个梁架所需要钢条的总长.



(第 10 题)　　(第 11 题)

11. $\triangle ABC$ 的三条中线 AD、BE、CF 相交于一点 O，证明这一点到每一边中点的距离等于这边上的中线的 $\frac{1}{3}$ (三角形的三条中线的交

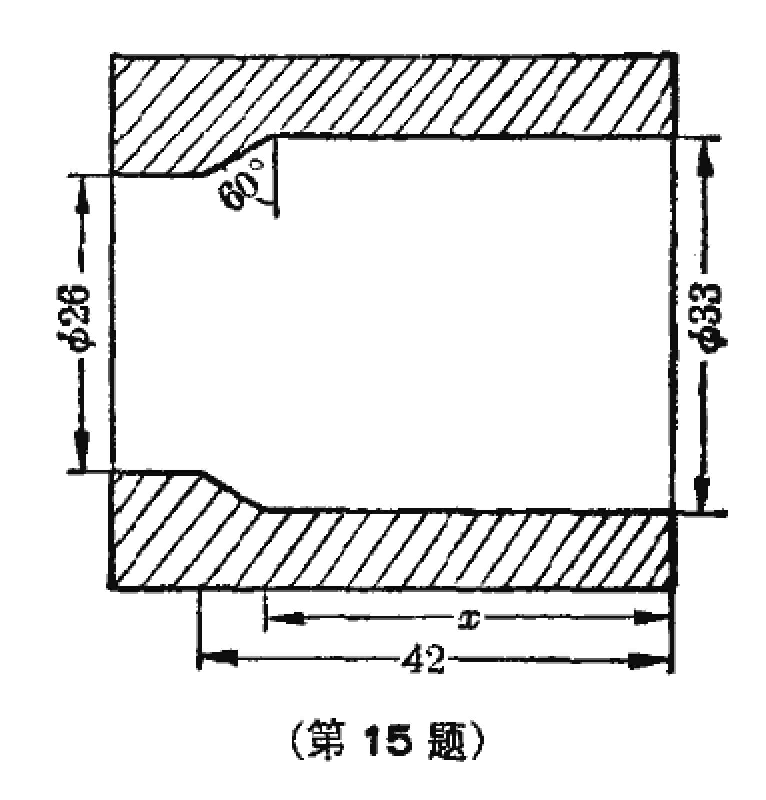
点叫做三角形的重心）.（提示：取 OB、OC 的中点 G、H，先证明 $GHEF$ 为平行四边形，然后得出 $OE=OG=GB$.）

12. 证明：直角三角形斜边中点到三个顶点的距离相等.

13. 在 $\triangle ABC$ 中，M 是 $\angle B$ 的平分线和 $\angle C$ 的平分线的交点，求证 M 点也在 $\angle A$ 的平分线上.

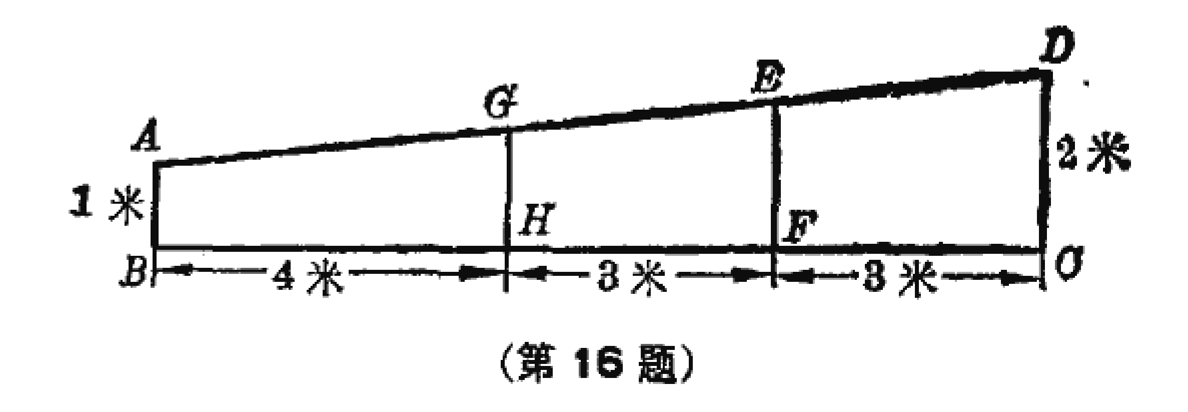
14. 某公社要新建一所学校，使它与三个生产队 A、B、C（不在一直线上）的距离相等，应怎样确定这个学校的位置.

15. 车工要在圆形钢管内车一个内孔，它的轴截面的尺寸如图，试求图中 x 的长度.



（第 15 题）

16. 某工厂要建造一座钢筋混凝土的斜桥，为了便于施工，工人师傅把一块梯形模板分成三小块制作，尺寸如图，然后到现场拼装，求 EF 和 GH 的长度.



（第 16 题）

17. AD 是 $\triangle ABC$ 的内角分角线，交 BC 于 D，试证 $BD:DC=AB:AC$.（提示：过 C 作 DA 的平行线交 BA 延长线于 G，证 $AC=AG$.）

第三章　三角形的边角计算

在长期的生产实践中，劳动人民创造了大量的三角形结构，积累了丰富的三角学知识，这些知识是我们进行生产斗争、科学实验的有效数学工具．例如，在机械加工中，加工工件的某些尺寸，需要用三角计算；在测量中，要用三角来计算高度和距离；在军事上，要用三角来测定空间点的位置，在一般工程设计与建筑施工中也都普遍用到三角计算。

本章将从一些实际的三角形边角计算问题出发，分析在一个三角形中边角的内在联系，找出边角计算的一般方法．

第一节　直角三角形的边角计算

一、直角三角形的边角分析

下面结合两个实例，先提出直角三角形边角计算的一般问题，分析边角的内在联系．

问题一　处在海防前线的我空军雷达兵战士，牢记毛主席“**提高警惕，保卫祖国**”的伟大教导，时刻警惕地注视着我国沿海领空．有一次在雷达中发现敌机，测得敌机离雷达站的斜距 $l=100$（公里），仰角 $\alpha=8°$．根据这些数据，我们如何求出敌机的高度以及它离雷达站的水平距离？

我们设想，过敌机所在位置 B 向地面引一条垂线与地面交于 C，则雷达位置 A、敌机位置 B 以及 C 点构成一个直角

三角形(图 3-1)．

为了方便起见，我们把直角三角形中直角所对的边叫斜边，锐角 α 所对的边叫 α 的对边，同 α 相邻的直角边叫 α 的邻边．

这个问题就是在直角三角形中，已知一个锐角 $\alpha=8°$，斜边 $l=100$ 公里，要求 α 的对边和邻边．

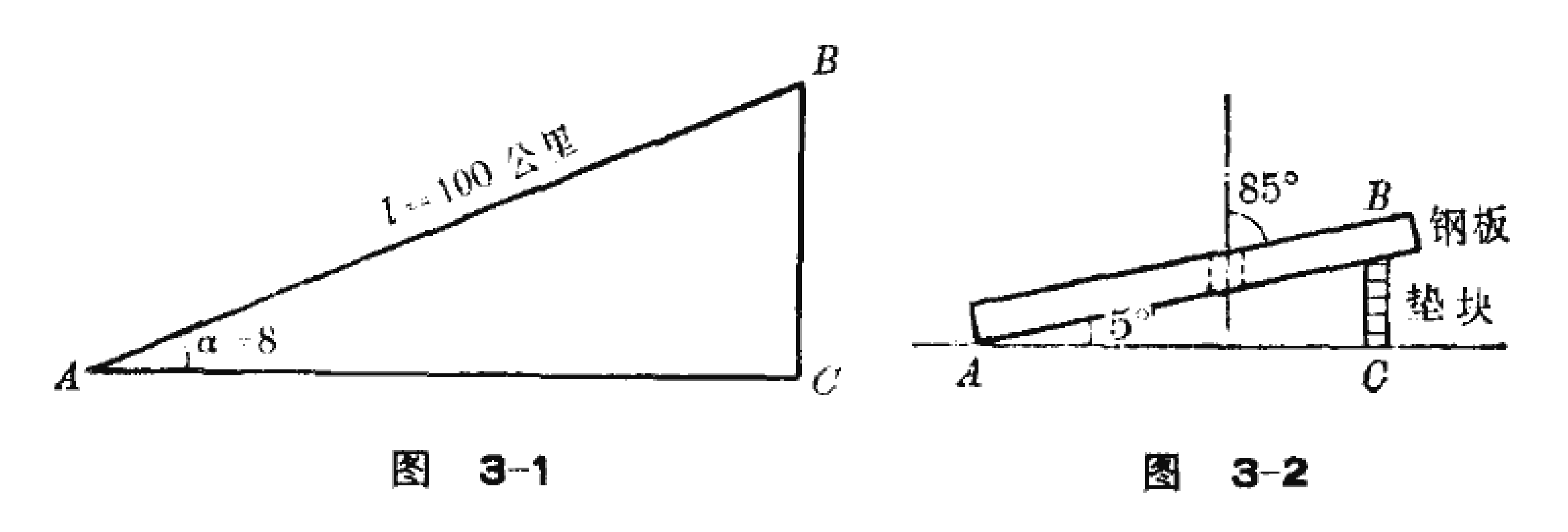


图 3-1　　　　图 3-2

问题二　某车间接受一批生产任务，要在厚钢板上钻出一个 85° 的斜孔，加工时，工人师傅把钢板 AB 一头垫高(图 3-2)，使它倾斜 5°，再把钻头垂直向下钻孔，如果垫块与支点 A 的距离 $AC=500$ 毫米，问垫块 BC 应有多高？

图 3-2 中，以 A、B、C 为顶点构成一直角三角形，问题就是在直角三角形 ABC 中，已知 $AC=500$ 毫米，$\alpha=5°$，求它的对边 BC．

上面两个问题的实际意义完全不同，但它们都可以归结为这样的数学问题，即在直角三角形 ABC 中，已知一些边和角，要求另外的一些边和角，这就是直角三角形的边角计算问题．

边和角是两个不同的概念，它们之间究竟有怎样的联系？为了弄清这个问题，我们先分析两个特殊的直角三角形的边角关系．

锐角为 45° 的直角三角形是一个等腰直角三角形(图

3-3)，这种三角形不论边长如何，两直角边总是相等的．如果用 a 表示直角边的边长，则斜边长

$$AB=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}\,a.$$

因此，这种三角形的一条直角边长与斜边长的比总有等式

$$\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{\sqrt{2}\,a}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{AC}{AB}=\frac{a}{\sqrt{2}\,a}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

这就是说，等腰直角三角形的直角边与斜边之比不论边长如何总是一个定数．

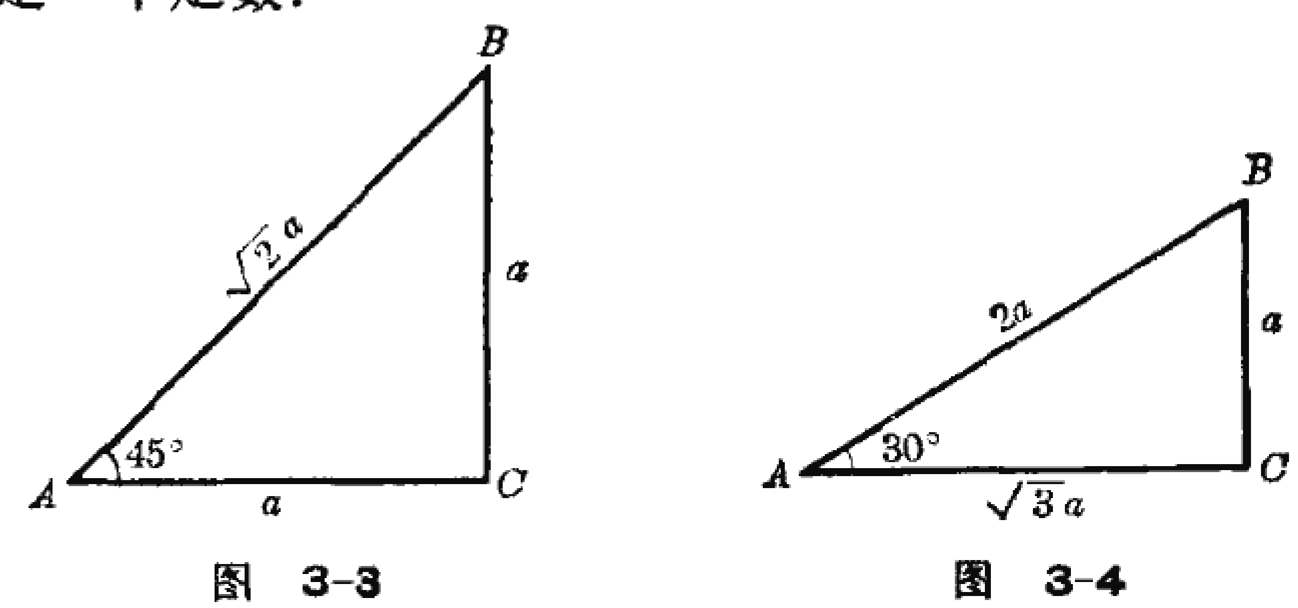


图 3-3　　　　图 3-4

又如，对于一个锐角为 30° 的直角三角形(图 3-4)，不论边长如何，它的 30° 角的对边长总是斜边长的一半，即若 30° 角的对边 BC 长为 a，则斜边 AB 长为 $2a$，因此，30° 角的邻边长

$$AC=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}\,a.$$

所以，在这个锐角 A 为 30° 的直角三角形中，

$$\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

这就是说，在一个锐角为 30° 的直角三角形中，两直角边与斜边之比也分别为一个定数.

从上面两个特例的分析，知道在一个锐角为 30° 或 45° 的直角三角形中，直角边与斜边之比同边的长短无关.

毛主席教导我们："**普遍性即存在于特殊性之中**". 下面再来揭示在一般的直角三角形中，边比与角的联系.

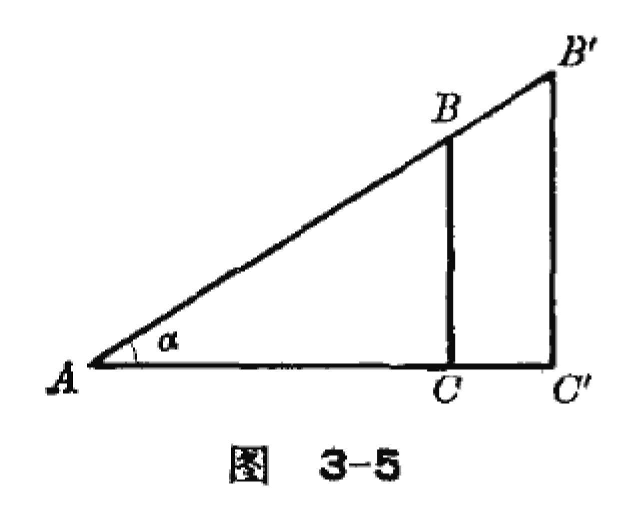


图 3-5

我们知道，当锐角 α 给定之后，可以作许多大小不同的直角三角形，它们都是相似三角形，其对应边的比是相等的. 如图 3-5，α 给定之后，所作出的两个直角三角形是相似的，即 $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$，所以

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\text{定数},$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}=\text{另一个定数}.$$

上面两个比式，揭示了直角三角形中边与锐角的内在联系，当直角三角形的一个锐角 α 给定之后，不论边长如何变化，任意两边之比分别为一个定数；反之，当边长之比给定时，角度也就确定了.

二、正弦和余弦

根据上面的讨论，我们引进下列概念.

定义 对于一个锐角 $\angle A$，任作一个以它为内角的直角三角形 ABC（图 3-6），各角的对边分别记为 a, b, c. 那末，$\angle A$ 的对边 a 与斜边 c 之比叫做 $\angle A$ 的正弦，用记号"sin A"

表示，即

$$\sin A=\frac{a}{c}.$$

$\angle A$ 的邻边 b 与斜边 c 之比叫做 $\angle A$ 的余弦，用记号“$\cos A$”表示，即

$$\cos A=\frac{b}{c}.$$

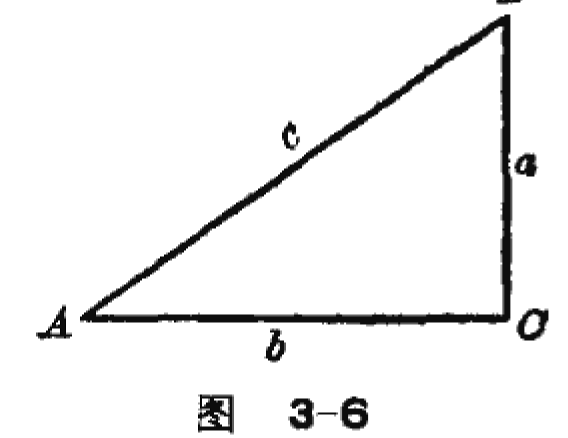


图 3-6

$\sin A$ 读作 sine A，$\cos A$ 读作 cosine A.

［例 1］ 在图 3-6 的直角三角形中，设 $a=3$，$b=4$，$c=5$，写出两个锐角的正弦和余弦.

解：根据定义得

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{3}{5},\quad \cos A=\frac{b}{c}=\frac{4}{5};$$

$$\sin B=\frac{b}{c}=\frac{4}{5},\quad \cos B=\frac{a}{c}=\frac{3}{5}.$$

在这里我们看到

$$\sin A=\cos B,\quad \cos A=\sin B,$$

而 $\angle A$ 与 $\angle B$ 互为余角，即 $\angle B=90^\circ-\angle A$，所以

$$\sin A=\cos(90^\circ-A),\quad \cos A=\sin(90^\circ-A).$$

这两个关系叫做余角关系，它对任意锐角 A 都成立.

［例 2］ 求 30°、45°、60° 角的正弦和余弦.

解：分别以这些角为一个锐角的直角三角形已在上一段中讨论过(图 3-3，3-4)，因此可以立刻写出

$$\sin 30^\circ=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2},\quad \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}\,a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}\,a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos 60^\circ=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2};$$

$$\sin 45^\circ=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos 45^\circ=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

上面三个特殊角的正弦、余弦是经常要用到的，望能熟记．对于0°到90°以内的其他锐角的正弦、余弦，可以直接从正弦、余弦表中查到．

[例3]　查表求出下列各正弦、余弦的值：

$\sin 25^\circ 2'$；　　　　$\sin 62^\circ 29'$；

$\cos 27^\circ 31'$；　　　　$\cos 86^\circ 12'$．

解：经查表得知，

$$\sin 25^\circ 2'=0.42315;$$

$$\sin 62^\circ 29'=0.88688;$$

$$\cos 27^\circ 31'=0.88688;$$

$$\cos 86^\circ 12'=0.06627.$$

或者从 $\cos A=\sin(90^\circ-A)$ 这个关系中也可以求得

$$\cos 86^\circ 12'=\sin(90^\circ-86^\circ 12')$$
$$=\sin 3^\circ 48'=0.06627.$$

[例4]　查表求下列各锐角：

(1)　已知 $\sin A=0.11609$，求 $\angle A$；

(2)　已知 $\cos B=0.75088$，求 $\angle B$．

解：这里是已知一个角的正弦或余弦值，要求这个角，这刚好是和上面相反的问题．经查表，由于 $\sin 6^\circ 40'=0.11609$，$\cos 41^\circ 20'=0.75088$，得到 $A=6^\circ 40'$，$B=41^\circ 20'$．

现在我们来解决本章开始提出的关于雷达探测敌机的问题．

[例5]　在直角三角形 ABC 中，已知 $c=100$，$\angle A=8^\circ$，求 a，b（图3-1）．

解：这个问题是已知直角三角形的斜边 c 和锐角 A，要求两条直角边 a 和 b. 由正弦、余弦的意义，

$$\sin A=\frac{a}{c}, \quad \cos A=\frac{b}{c}$$

得

$$a=c\sin A=100\sin 8^\circ=100\times 0.13917\approx 13.92,$$

$$b=c\cos A=100\cos 8^\circ=100\times 0.99027\approx 99.$$

由此可知，敌机飞行高度约为 13.92 公里，距雷达站的水平距离约为 99 公里.

［例 6］ 如图 3-7，压气机的曲柄 $OC=r$，连杆 $BC=l$，当曲柄 OC 转动了锐角 α 时，求 OB 的长.

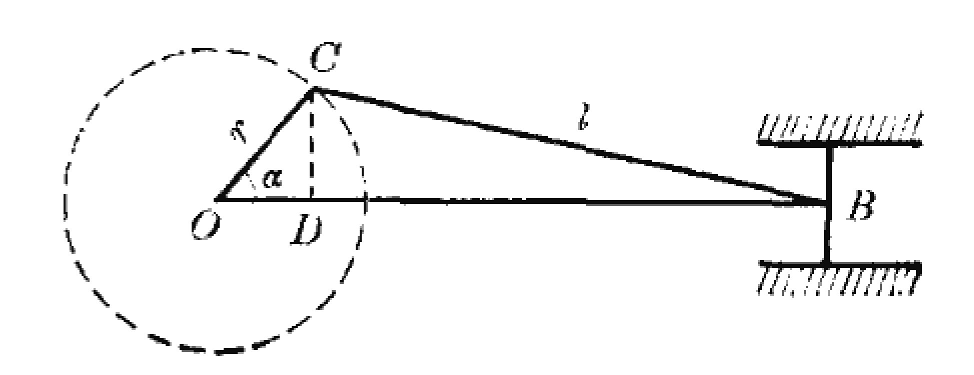


图 3-7

解：因为以 O、C、B 为顶点的三角形不一定是一个直角三角形，不能直接应用前面学过的知识. 如果过 C 点向 OB 引一条垂线 CD，把 $\triangle OCB$ 化为两个直角三角形 COD 和 CBD，这样就能用正弦或余弦来解.

从图中可见，$OB=OD+DB$，且

$$OD=r\cos\alpha, \quad CD=r\sin\alpha.$$

在直角三角形 CBD 中，利用勾股定理得

$$DB^2=CB^2-CD^2=l^2-r^2\sin^2\alpha,$$

所以

$$OB=OD+DB=r\cos\alpha+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\alpha}.$$

三、正　　切

下面我们再引进直角三角形的另一个边比，即 $\angle A$ 的对边与邻边的比．根据相似三角形的性质，当锐角 A 确定之后，它们的直角边之比也是一个定数．

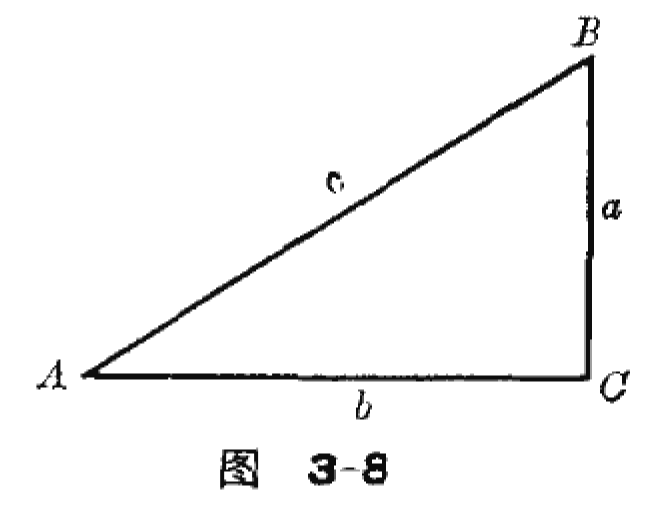


图　3-8

定义　对于一个锐角 $\angle A$，任作一个以它为内角的直角三角形 ABC，那末，$\angle A$ 的对边 a 与 $\angle A$ 的邻边 b 之比叫做 $\angle A$ 的正切，用记号"tg A"表示，即

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}.$$

tg A 读作 tangent A.

tg A 的值也可以从《正切表》中查得．

[例 7]　求 30°、45°、60° 的正切值．

解：这些特殊角的正切值，可以通过查表求得，也可以从图 3-3，3-4 中直接求得，

$$\operatorname{tg} 30^\circ=\frac{a}{\sqrt{3}\,a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ=\frac{\sqrt{3}\,a}{a}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ=\frac{a}{a}=1.$$

[例 8]　在图 3-9 的 $\triangle ABC$ 中，已知 $BD\perp AC$，根据图中数据，求出 tg A、tg C，并由此求出 $\angle A$，$\angle C$ 的大小．

解：先求得

$$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{36}=6.$$

按正切定义，

$$\operatorname{tg} A=\frac{BD}{AD}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}=0.75,$$

$$\operatorname{tg} C=\frac{BD}{DC}=\frac{6}{5}=1.2.$$

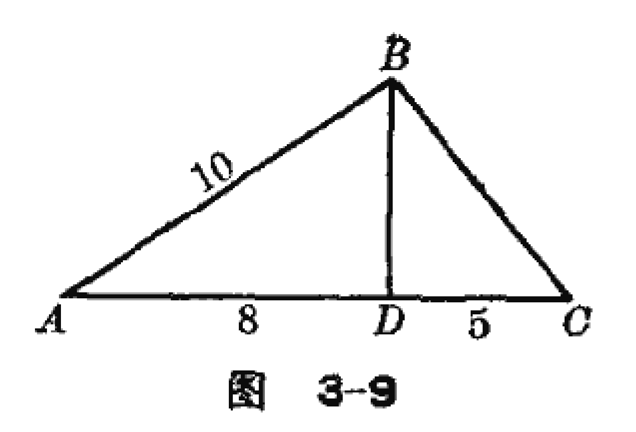


图 3-9

经查表， $\operatorname{tg} 36°52' \approx 0.75$， $\operatorname{tg} 50°12' \approx 1.2$，
所以

$$\angle A \approx 36°52'; \quad \angle C \approx 50°12'.$$

在这里我们再来解决本章开始时提出的第二个问题，即关于钢板钻孔的问题．在图 3-2 的直角三角形 ABC 中，已知 $AC=500$ 毫米，$\angle A=5°$，求 BC.

根据正切的定义，

$$\operatorname{tg} 5°=\frac{BC}{500},$$

所以

$$BC=500 \cdot \operatorname{tg} 5°=500 \times 0.08749 \approx 43.75.$$

即在 C 点应垫高 43.75 毫米.

在直角三角形 ABC 中，我们把 $\angle A$ 的正切的倒数叫做 $\angle A$ 的余切，记作 $\operatorname{ctg} A$，即

$$\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a},$$

$\operatorname{ctg} A$ 读作 cotangent A．余切的值也可在《余切表》中查到.

例如，已知 $\angle A=62°32'$，$a=20$，求 b．由上式得

$$\begin{aligned} b&=a \operatorname{ctg} A=20 \operatorname{ctg} 62°32' \\ &=20 \times 0.51983=10.3966. \end{aligned}$$

正切和余切间也有下面的余角关系：

$$\operatorname{tg} A=\operatorname{ctg}(90°-A), \quad \operatorname{ctg} A=\operatorname{tg}(90°-A),$$

请读者自己推导.

前面所讲的一个角的正弦、余弦、正切、余切，统称为这个角的三角比.

四、解直角三角形的应用举例

毛主席教导我们："**认识从实践始，经过实践得到了理论的认识，还须再回到实践去。**"下面介绍怎样利用三角比解决某些实际问题.

〔例 9〕 上海港机械厂的工人同志，自行设计制造了二十吨门式起重机(图 3-10 (甲))．机身高 21 米，吊杆 AB 长 36 米，吊杆的倾角 A(即吊杆与水平线的夹角)可以从 30° 转到 80°，求起重机工作时的最大高度和最大水平距离.

解：当吊杆 AB 的倾角 A 达到最大限度 80° 时，起重机

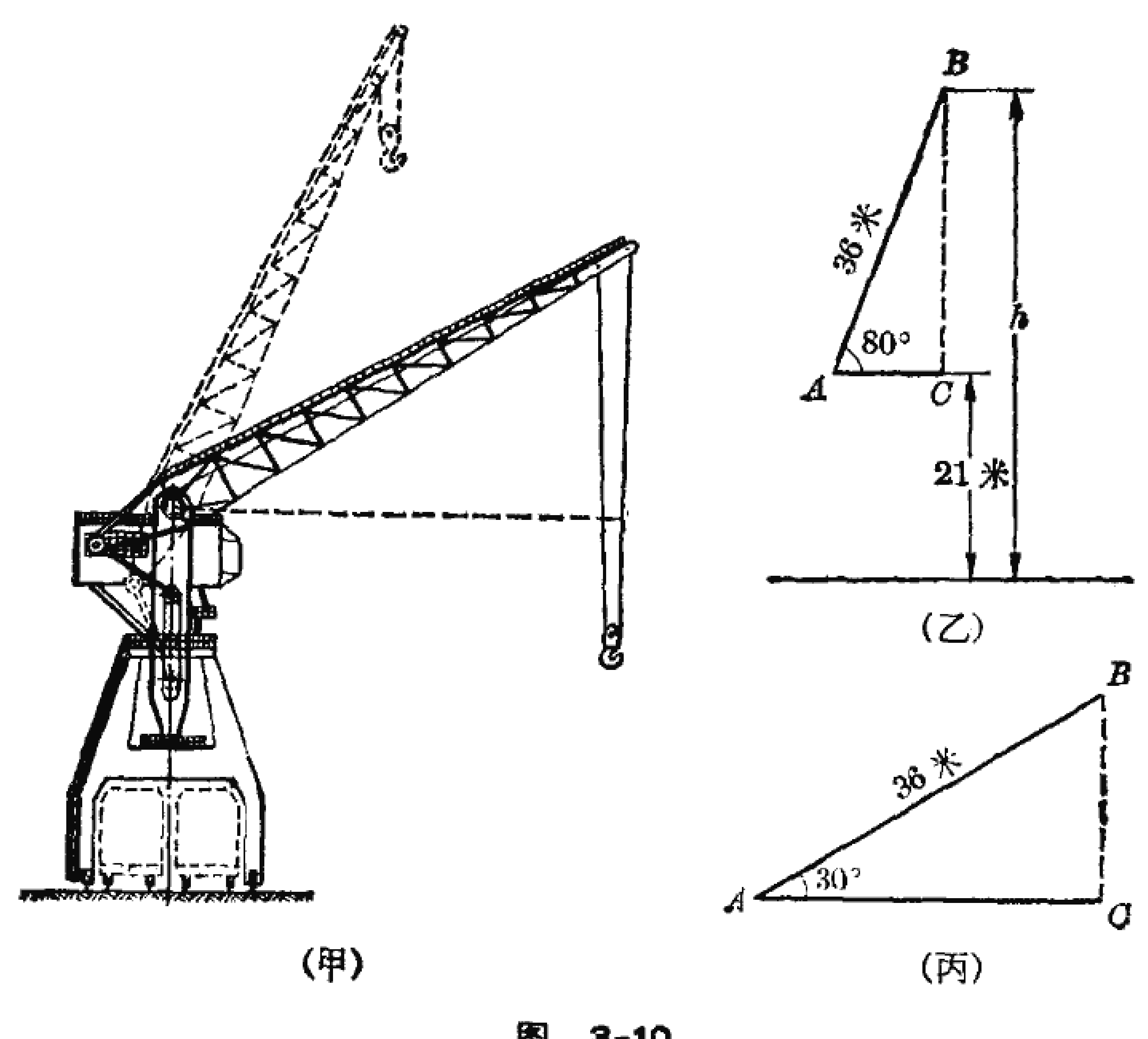


图 3-10

起吊最高，这时，如图3-10（乙）所示，在直角三角形 ABC 中，$\angle A=80^\circ$，$AB=36$，而

$$BC=AB\sin 80^\circ=36\sin 80^\circ,$$

查表得

$$\sin 80^\circ=0.98481,$$

所以

$$BC=36\times 0.98481\approx 35.45,$$

$$h=21+35.45=56.45.$$

即起重机的最大起吊高度为 56.45 米。

当倾角 A 达到最小限度时，起吊的水平距离最大，这时，在直角三角形 ABC 中，$\angle A=30^\circ$，$AB=36$，而

$$AC=AB\cos 30^\circ=36\times 0.86603\approx 31.18.$$

所以起重机起吊的最大水平距离为 31.18 米。

［例 10］ 机械厂生产的减速箱壳尺寸（单位：毫米）如图3-11（甲）所示，求相邻两孔中心的水平距离 x、y。

解：从图中看出 A、D、B 三孔在一直线上，且与水平线的夹角为 22°，$AD=450$，$DB=300$，求相邻两孔中心的水平距离即是要求图 3-11（乙）中的 CE、EB。

在直角三角形 DEB 中，

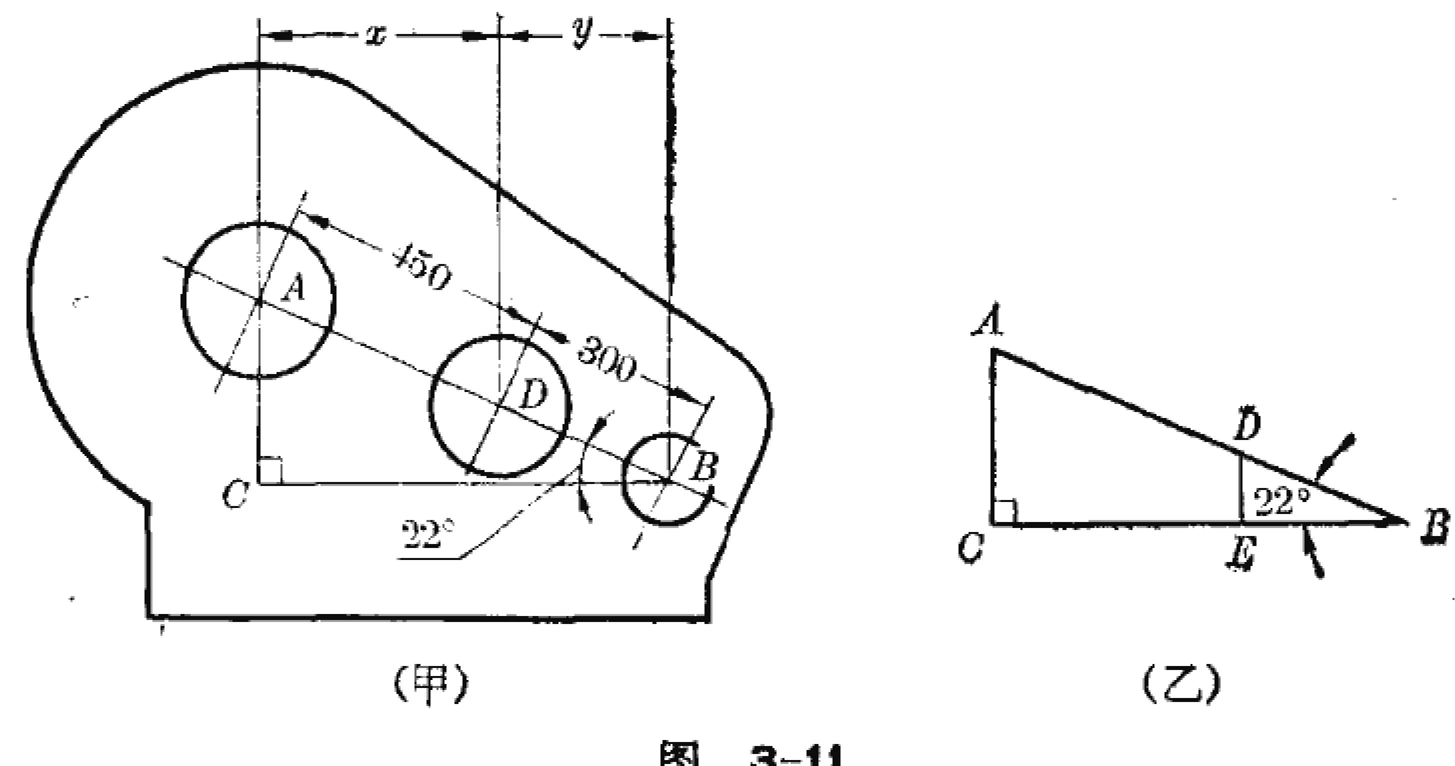


图 3-11

$$\cos B=\frac{EB}{DB},$$

所以

$$y=EB=DB\cos 22^\circ=300\times 0.92718\approx 278.15.$$

在直角三角形 ACB 中,

$$AB=AD+DB=450+300=750.$$

因为

$$\cos B=\frac{CB}{AB},$$

所以

$$CB=AB\cdot\cos 22^\circ=750\times 0.92718\approx 695.38.$$

$$x=CB-EB\approx 695.38-278.15=417.23.$$

由此可知, A、D 两孔的水平距离约为 417.23 毫米; D、B 两孔的水平距离约为 278.15 毫米.

[例 11] 一条公路的水平距离 l 与路面升高 h 的比值 $i=h:l$ 叫做路面的坡度. 已知某段公路, 每前进 (水平) 100 米, 就升高 4.25 米. 求路面的坡度及路面对水平面的倾角 α.

解: 路面的坡度为

$$i=\frac{h}{l}=\frac{4.25}{100}=0.0425.$$

从图 3-12 的直角三角形中可见, 边比 $h:l$ 正好是所求倾角 α 的正切, 即坡度 $i=\operatorname{tg}\alpha$, 所以

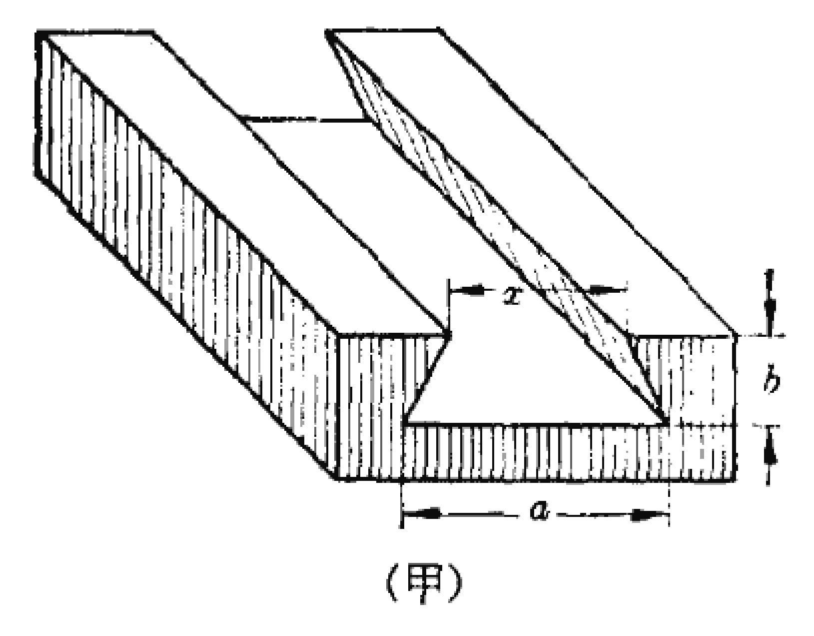
$$\operatorname{tg}\alpha=0.0425,$$

查表得

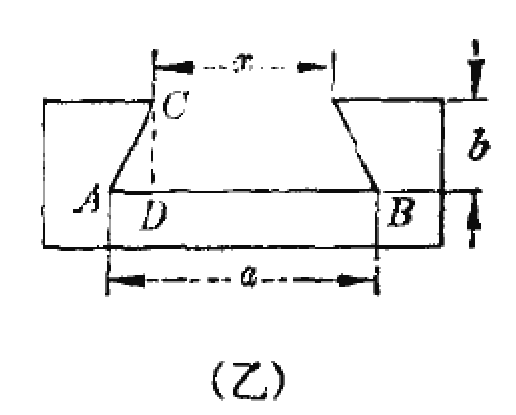
$$\alpha=2^\circ 26'.$$

图 3-12

[例 12] 某型号机床拖板燕尾槽的燕尾角 $\angle CAD$ 为 60°, 底宽 a 为 300 毫米, 槽深 b 为 50 毫米(图 3-13 (甲)), 试求出上口宽度 x.



(甲)



(乙)

图 3-13

解：在燕尾槽的横截面图 3-13（乙）中，要求出上口宽 x，可过 C 点作 $CD \perp AB$，则 $x = AB - 2AD$. 而 $AB = 300$，只要求出 AD 就行了.

在直角三角形 ACD 中，由 $\operatorname{ctg} A = \dfrac{AD}{CD}$ 得

$$AD = CD \operatorname{ctg} A = 50 \operatorname{ctg} 60^\circ = 50 \times 0.57735 \approx 28.868,$$

所以

$$\begin{aligned} x &= AB - 2AD = 300 - 2 \times 28.868 \\ &= 300 - 57.736 \approx 242.26. \end{aligned}$$

即上口宽约为 242.26 毫米.

五、三角比之间的关系

在直角三角形 ABC 中，两个锐角之间以及它的三条边之间都是紧密联系的，比如

$$\angle A + \angle B = 90^\circ, \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

这种联系也必然要反映到三角比中来. 事实上，由三角比的定义，可直接得到下列的基本关系：

(1) 勾股关系：

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1;$$

(2) 比值关系：

$$\operatorname{tg} A=\frac{\sin A}{\cos A},\quad \operatorname{ctg} A=\frac{\cos A}{\sin A};$$

(3) 倒数关系：

$$\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{ctg} A=1.$$

下面来证明勾股关系．因为

$$\sin A=\frac{a}{c},\qquad \cos A=\frac{b}{c},$$

所以

$$\sin^2 A+\cos^2 A=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1.$$

其余关系请读者自己证明．

利用上述公式，就可以从一个三角比求出其他的三角比．

[例 13]　已知 $\sin A=\frac{3}{5}$，求 $\cos A$，$\operatorname{tg} A$，$\operatorname{ctg} A$．

解：由勾股关系，得

$$\cos^2 A=1-\sin^2 A.$$

两边开方，注意 $\cos A$ 是正值，只取正根得

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}.$$

由

$$\operatorname{tg} A=\frac{\sin A}{\cos A}\quad 及\quad \operatorname{ctg} A=\frac{1}{\operatorname{tg} A}$$

得

$$\operatorname{tg} A=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4},\qquad \operatorname{ctg} A=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}.$$

上面是利用三角比之间的关系来进行计算的．另外，我们还有更为直观的方法．

因为在直角三角形中，当锐角给定之后，边比与边长无关，所以我们作一个辅助的直角三角形 ABC（图 3-14），由已知 $\sin A=\frac{3}{5}$，可取 $AB=5$，$BC=3$，从勾股定理得

$$AC=\sqrt{25-9}=4.$$

所以

$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{4},$$

$$\operatorname{ctg} A=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{3}.$$

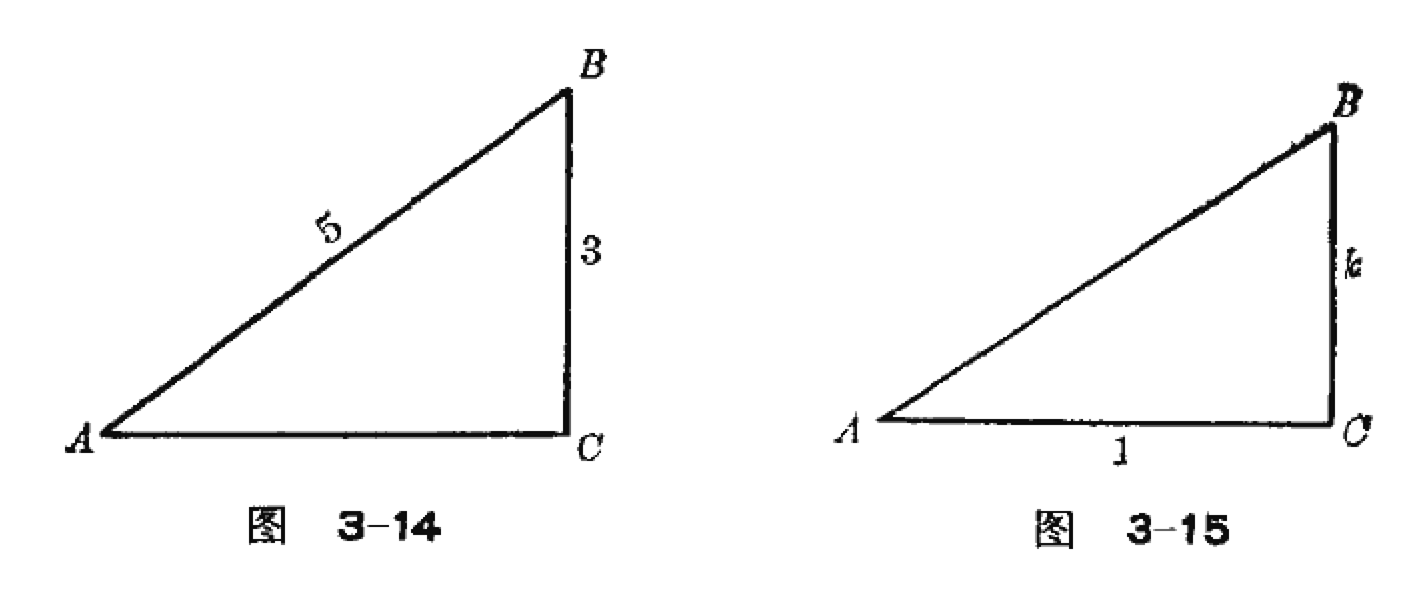


图 3-14　　图 3-15

［例 14］ 已知 $\operatorname{tg} A=k$，求 $\sin A$，$\cos A$.

解：我们还是用作辅助直角三角形的办法来计算.

在图 3-15 的直角三角形 ABC 中，由于 $\operatorname{tg} A=k$，令 $AC=1$，$BC=k$，根据勾股定理得

$$AB=\sqrt{1^2+k^2},$$

所以

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

小　　结

1. 直角三角形的边角分析.

在直角三角形中,边比只与锐角的大小有关,而同边长无关. 当锐角给定后, 边比分别为一个定数. 反之, 边比给定时,角度也就确定了.

2. 作一个以 $\angle A$ 为内角的直角三角形 ABC (图 3-6), 那末,在直角三角形 ABC 中,锐角 A 的三角比定义为:

正弦: $\sin A=\frac{a}{c}$;　　余弦: $\cos A=\frac{b}{c}$;

正切: $\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}$;　　余切: $\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}$.

3. 特殊角的三角比的值.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 三角比之间的关系.

(1) 余角关系:

$\sin A=\cos(90°-A)$;　　$\cos A=\sin(90°-A)$;

$\operatorname{tg} A=\operatorname{ctg}(90°-A)$;　　$\operatorname{ctg} A=\operatorname{tg}(90°-A)$.

(2) 勾股关系:

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1.$$

(3) 比值关系:

$$\operatorname{tg} A=\frac{\sin A}{\cos A}; \quad \operatorname{ctg} A=\frac{\cos A}{\sin A}.$$

(4) 倒数关系:

$$\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{ctg} A=1.$$

5. 解直角三角形.

(1) 已知直角三角形中一锐角和任意一边, 可根据两锐角互余关系求另一锐角, 再由三角比和勾股定理求其他的边;

(2) 已知直角三角形的任意两边, 可根据勾股定理求第三边, 再由三角比求锐角.

习　题

1. 在直角三角形 ABC 中, 已知 $c=3$, $a=2$, 求 $\angle A$、$\angle B$ 的正弦与余弦.
2. CD 是直角三角形 ABC 斜边 AB 上的高, 写出 $\angle A$, $\angle DCB$ 的正弦和余弦.
3. 在 $\triangle ABC$ 中, $CD\perp AB$, 图中哪些线段的比可以表示 $\angle A$ 的正弦? 哪些线段的比可以表示 $\angle BCD$ 的正弦?

(第 3 题)

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C=90°$, $AB=10$, $BC=8$, 求 $\sin A$, $\cos A$ 的值.
5. 查表求下列的正弦、余弦值:

   (1) $\sin 21°$, $\sin 36°42'$, $\sin 52°47'$;

   (2) $\cos 46°38'$, $\cos 69°$, $\cos 85°4'$.
6. 查表求锐角 α:

   (1) $\sin\alpha=0.09585$, $\sin\alpha=0.26556$, $\sin\alpha=0.90631$;

   (2) $\cos\alpha=0.00378$, $\cos\alpha=0.58731$, $\cos\alpha=0.85657$.

7. 在直角三角形 ABC 中，已知 $a=4$, $b=3$, 写出 $\sin A$, $\cos B$ 的值.

8. ABC 是一个等腰三角形，已知腰长为 13，底长为 10，求它的底角.

9. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$:

(1) 已知 $a=5$, $b=12$, 求 $\angle A$;

(2) 已知 $a=14.2$, $\angle A=40°$, 求 c;

(3) 已知 $c=3.28$, $\angle B=56°$, 求 a;

(4) 已知 $c=180$, $b=50$, 求 $\angle A$, $\angle B$.

10. 求下列各式的值:

(1) $(\sin 60°+\cos 60°)(\cos 30°-\sin 30°)$;

(2) $(1+\cos 45°+\sin 30°)(1-\sin 45°+\cos 60°)$;

(3) $\dfrac{\sin 60°-\sin 30°}{\sin 60°+\sin 30°}$.

11. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$, $c=17$, $b=15$, 求 $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} B$ 的值.

12. 查表求下列的正切、余切值:

(1) $\operatorname{tg} 19°55'$, $\operatorname{tg} 46°15'$, $\operatorname{tg} 76°30'$;

(2) $\operatorname{ctg} 25°17'$, $\operatorname{ctg} 57°28'$, $\operatorname{ctg} 89°2'$.

13. 查表求锐角 A:

(1) $\operatorname{tg} A=0.4003$, $\operatorname{tg} A=0.1742$, $\operatorname{tg} A=2.824$;

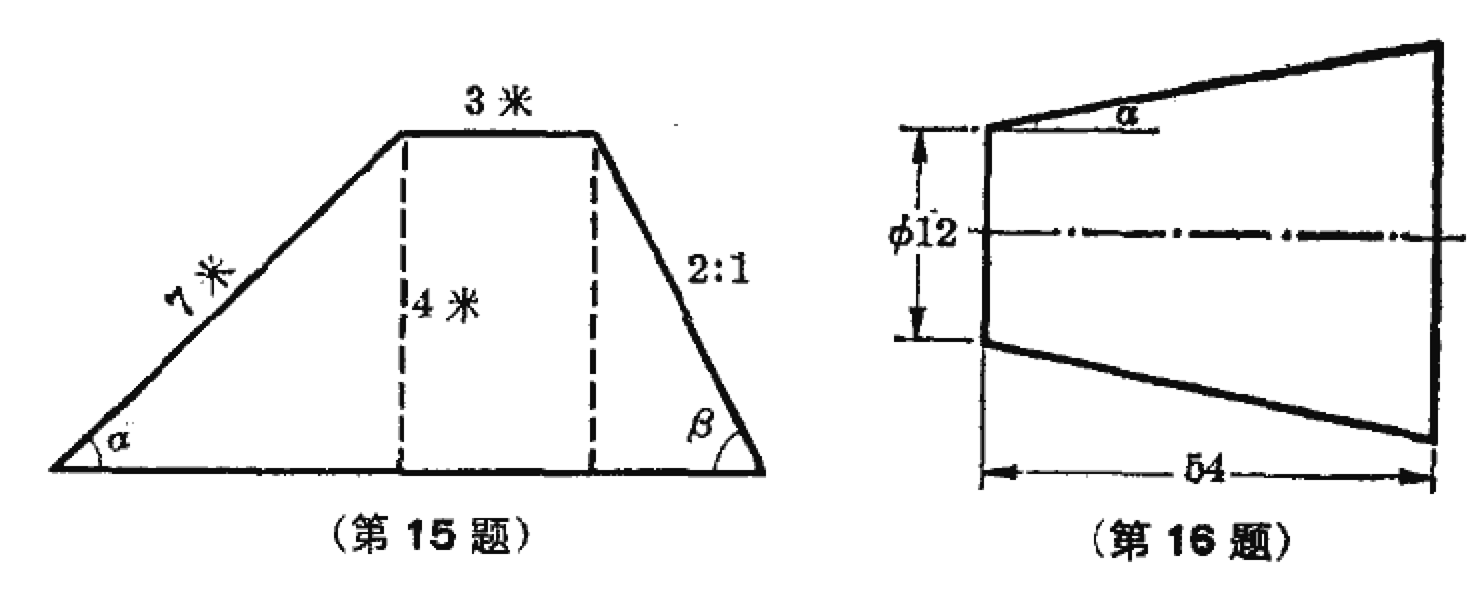
(2) $\operatorname{ctg} A=3.191$, $\operatorname{ctg} A=0.4964$.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$:

(1) 已知 $\angle A=37°10'$, $b=14.3$, 求 a;

(2) 已知 $\angle A=46°30'$, $a=20$, 求 b.

15. 拦水坝的断面尺寸如图(图中 2:1 表示坡度)，求角 α, β 及下底宽.



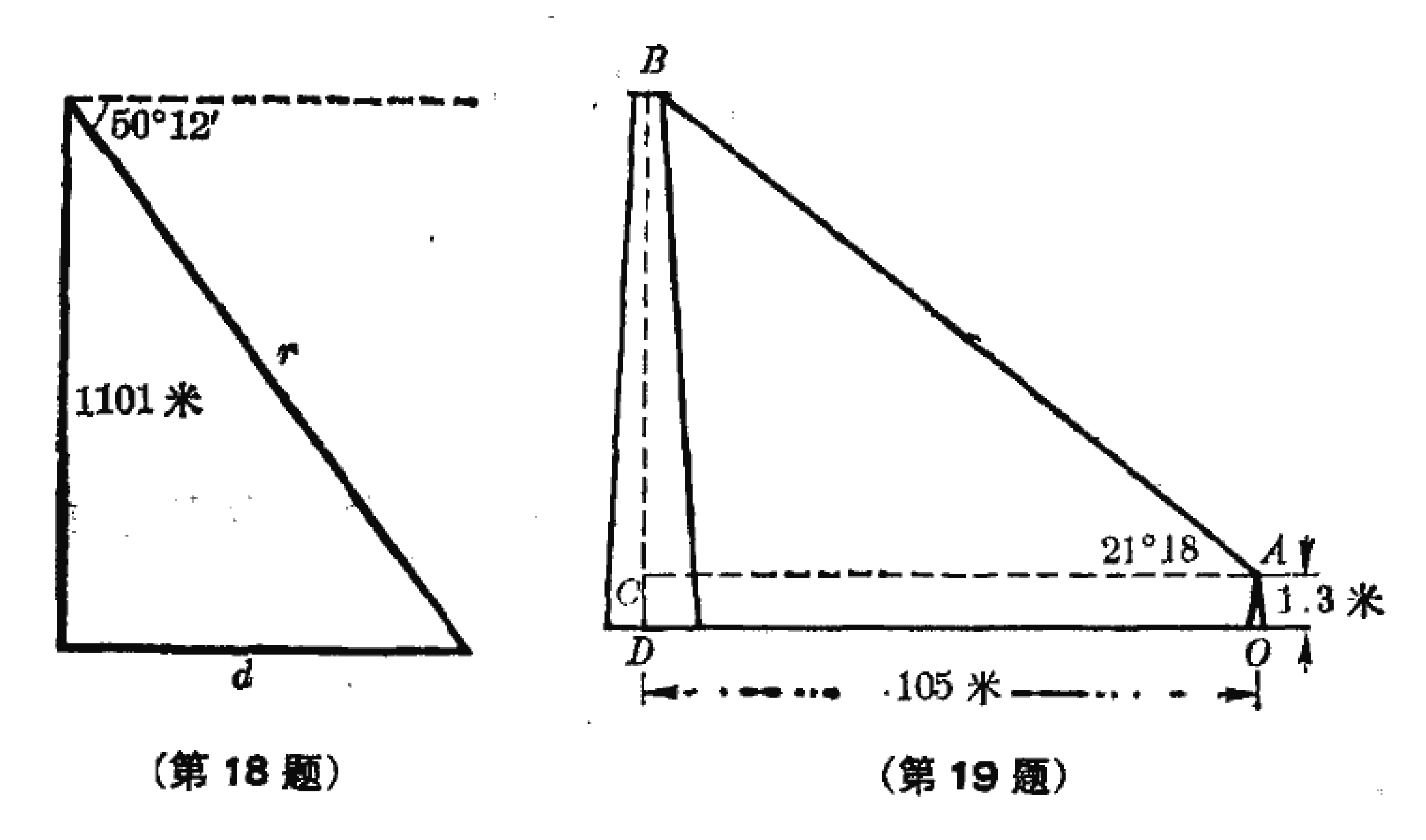
(第 15 题)　　(第 16 题)

16. 要车削一个小端直径为 12 毫米，长为 54 毫米，斜角 $\alpha=7°$ 的圆台，

问最小应需多大直径的圆钢?

17. 飞机飞行的速度为 100 米/秒，上升角为 30°. 求 30 秒后，飞机上升的高度以及飞机距起飞点的水平距离.

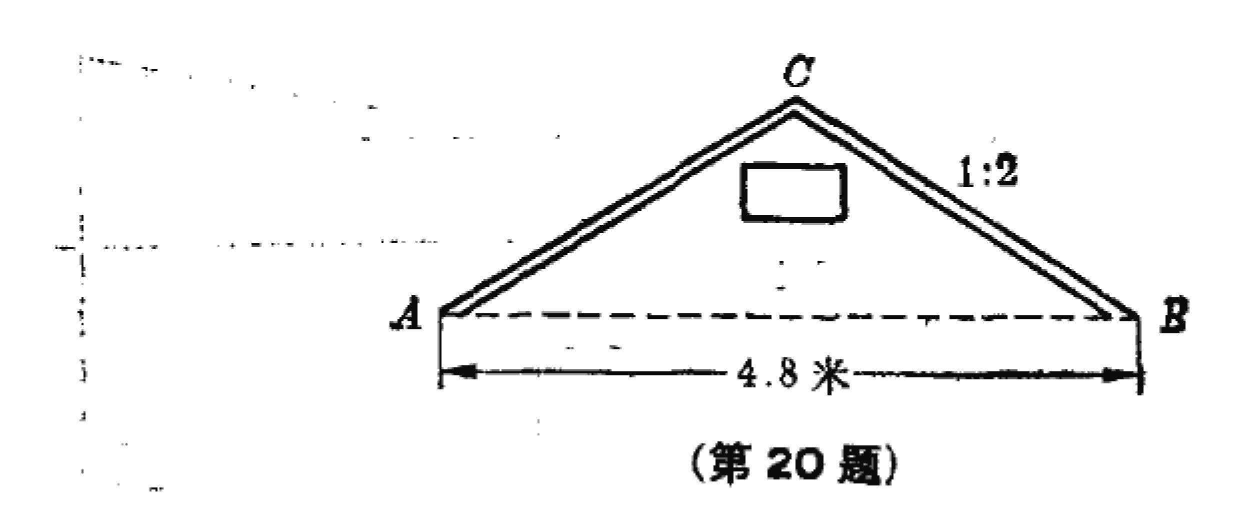
18. 我空军战士，在飞机上测得入侵敌舰的俯角为 50°12′，已知当时飞行高度为 1101 米，求敌舰与我飞机的斜距 r 和水平距离 d.



(第 18 题)　　　　(第 19 题)

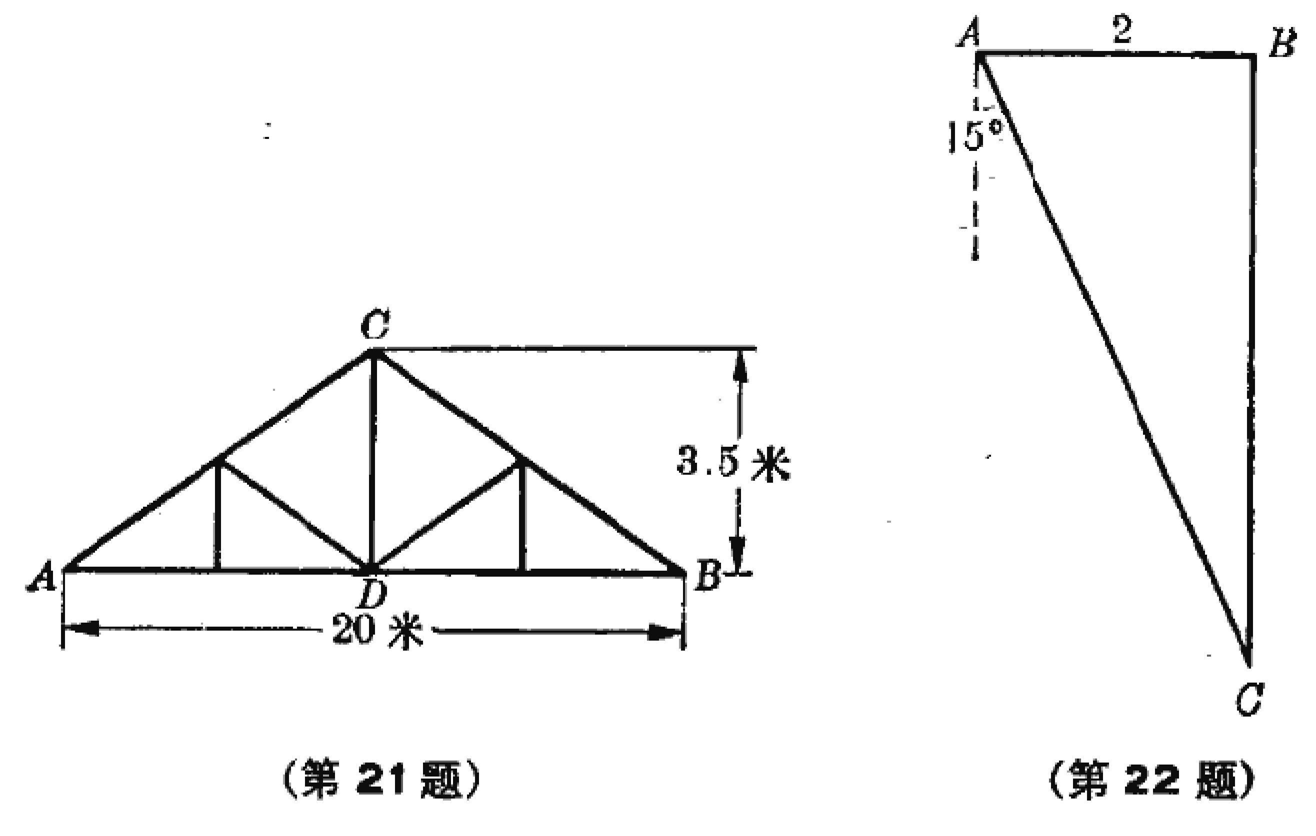
19. 要测烟囱的高度，在离烟囱底部 D 的 105 米处，利用测角仪在 A 点观测烟囱的顶点 B，测得仰角为 21°18′，测角仪高 $OA=1.3$ 米，试计算烟囱的高 DB.

20. 某电灌站机房屋面侧视图如图所示，已知 $AB=4.8$ 米，屋面坡度为 1:2，求 AC 的长. 如果屋面长 7.6 米，每平方米屋面铺瓦约 15 张，问这机房屋面铺瓦多少张?



(第 20 题)

21. 新建车间，设计人员把屋架下弦 AB 定为 20 米，中柱 CD 定为 3.5 米，按淌水要求屋顶倾斜角不得小于 21°，检查一下，设计是否符



（第21题）　　（第22题）

合要求.

22. 东西两炮台 B、A 相距2公里，同时发现入侵敌舰 C，测得敌舰在东炮台 B 的正南方，在西炮台 A 的南偏东 $15°$，试求敌舰与两炮台的距离.

23. (1) 已知 $\cos\alpha=\frac{5}{13}$，求 $\sin\alpha$，$\operatorname{tg}\alpha$，$\operatorname{ctg}\alpha$；

(2) 已知 $\sin\alpha=0.7$，求 $\cos\alpha$，$\operatorname{tg}\alpha$，$\operatorname{ctg}\alpha$；

(3) 已知 $\operatorname{tg}\alpha=2$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$.

第二节　一般三角形的边角计算

在实践中除了直角三角形的边角问题外，还有一般三角形的边角问题.

例如，上海市城市建设部门为了清洁水源、保证人民健康，将污水进行处理，需要在黄浦江底敷设一条过江管道，把无害污水送到农村作肥料，如何算出江的宽度呢？

如图3-16所示，为了计算河宽 AB，先在 B 岸另选一点 C，则 A、B、C 三点连成一个三角形，我们知道，在一个三角形中如果两角和一夹边给定之后，这个三角形就完全确定了.

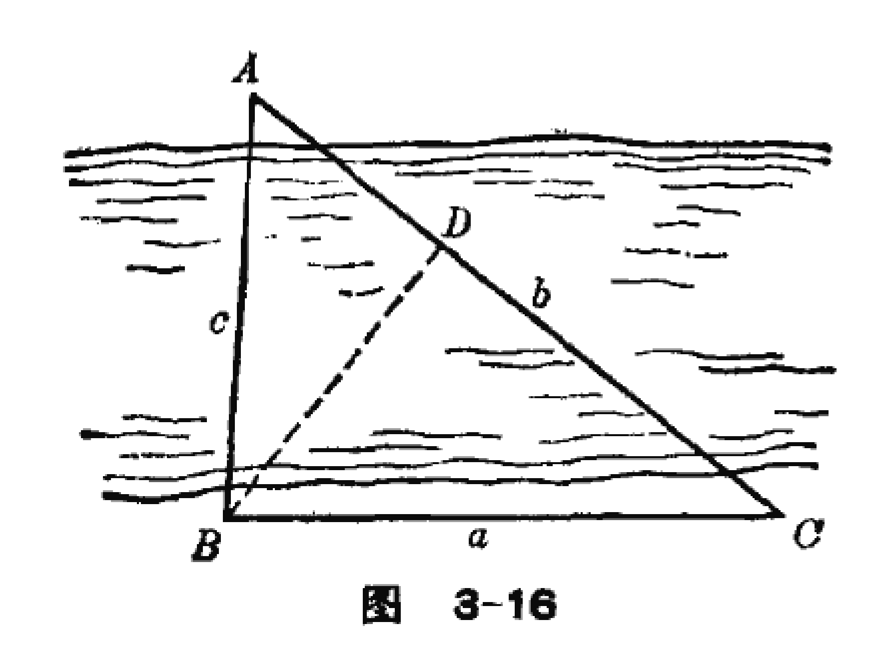


图 3-16

因此，设测得两角 $\angle B=88°1'$、$\angle C=46°43'$ 及其夹边 $BC=a=521.21$ 米．根据这些数据就可计算出 AB，如何计算 AB 呢？这是已知任意三角形中的一些边和角，要计算其他的边和角的问题，也就是解一般三角形的问题．为了解决这类问题，还需要进一步研究一般三角形中边和角的关系，下面我们介绍有关一般三角形边角关系的两个定理．

一、正弦定理

在图 3-16 中，已知 $\triangle ABC$ 中的 $\angle B$、$\angle C$ 和 BC 的长 a，要求 AB 的长 c．为此，从点 B 引一条辅助线 BD，使 $BD\perp AC$，得到两个直角三角形 ABD 和 BCD．

在直角三角形 ABD 和 BCD 中，分别有

$$BD=c\sin A,\quad BD=a\sin C;$$

所以

$$a\sin C=c\sin A,$$

即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

由这个式子，就可以计算出河宽 AB.

同样，过 C 作 AB 的垂线可导出：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

把上面两个等式联起来，即得

正弦定理 在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边分别为a、b、c，则有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

这就是说，三角形各边的边长与其对角的正弦之比相等.

因此，在一般三角形中，知道了两边及一个对角或知道了两角及一条对边，就可以利用正弦定理求解其他的边和角.

应用正弦定理时，如果$\triangle ABC$中有一个角为钝角（如图3-17中的$\angle ABC$），该怎么办呢？

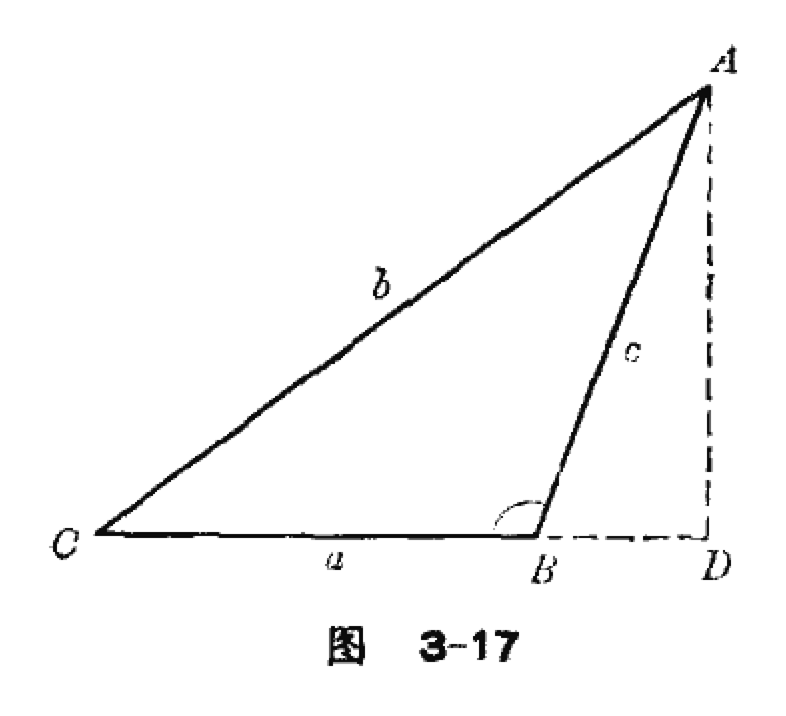


图 3-17

$\angle B$的补角$\angle ABD=180°-\angle B$为锐角. 自A点引CB的垂线交CB的延长线于D. 于是在直角三角形ABD中，

$$AD=c\sin(180°-B).$$

在直角三角形ACD中，

$$AD=b\sin C,$$

所以

$$b\sin C=c\sin(180°-B),$$

即

$$\frac{b}{\sin(180°-B)}=\frac{c}{\sin C}.$$

同理有

$$c\sin A=a\sin C,$$

即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin(180°-B)}=\frac{c}{\sin C}.$$

在代数第五章中将会说明 $\sin(180°-B)=\sin B$，这样，在钝角时导出的公式就与锐角时的公式一致了.

现在回到我们最初的问题，求黄浦江的宽度 AB.

由于 $\angle A=180°-\angle B-\angle C=180°-88°1'-46°43'=45°16'$，因此，应用正弦定理，得到

$$\frac{521.12}{\sin 45°16'}=\frac{c}{\sin 46°43'}.$$

于是

$$c=\frac{521.12}{\sin 45°16'}\times\sin 46°43'$$

$$=\frac{521.12\times 0.72797}{0.71039}\approx 534.$$

即黄浦江宽度约为 534 米.

二、余 弦 定 理

根据伟大领袖毛主席"**备战、备荒、为人民**"的教导，要在山里挖一个隧道 AB，如图 3-18 所示，为了知道 AB 的长，我们在山的一侧取定一点 C，在 C 点测得

$BC=a=180$（米），

$AC=b=210$（米），

$\angle ACB=52°36'$，

如何根据已测出的数据算出隧道的长度 AB 呢？

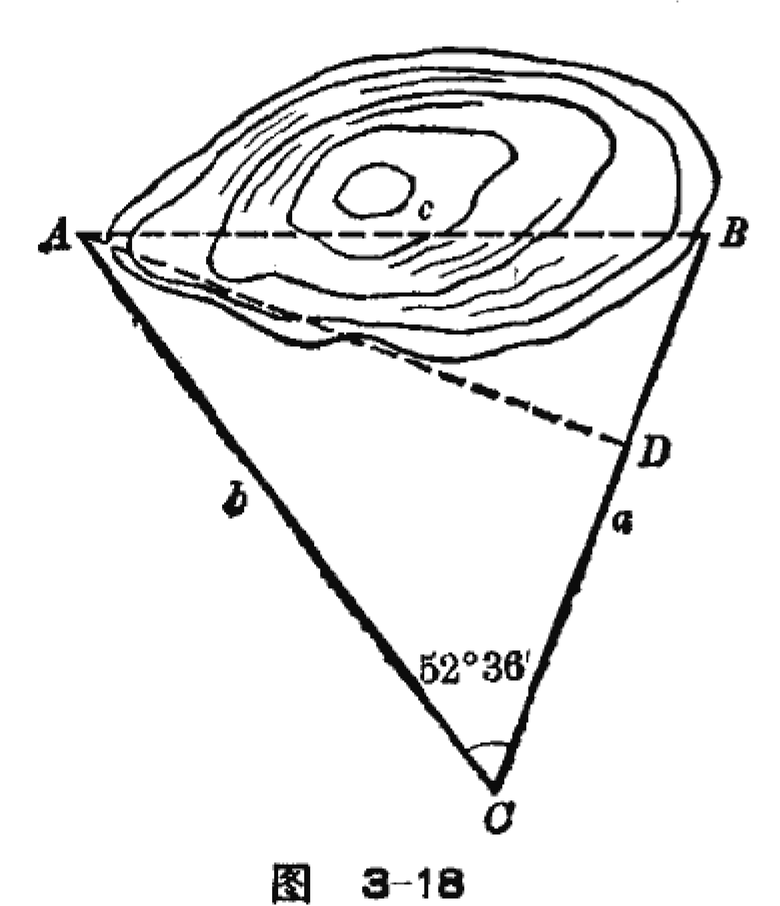


图 3-18

这个问题就是在任意三

角形 ABC 中，已知两边 AC、BC 及其夹角 $\angle C$，求 AB 的长.

我们仍旧用作辅助线的方法，过 A 点作对边 BC 的垂线 AD，分原三角形为两个直角三角形.

在直角三角形 ADB 中，按勾股定理有

$$AB^2=AD^2+BD^2.$$

从直角三角形 ADC，可知

$$AD=AC\sin C,$$

$$BD=BC-DC=BC-AC\cos C,$$

所以

$$\begin{aligned}AB^2&=(AC\sin C)^2+(BC-AC\cos C)^2\\&=AC^2\sin^2 C+BC^2+AC^2\cos^2 C-2BC\cdot AC\cos C\\&=AC^2(\sin^2 C+\cos^2 C)+BC^2-2BC\cdot AC\cos C\\&=AC^2+BC^2-2BC\cdot AC\cos C,\end{aligned}$$

即

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

于是我们得到

余弦定理 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别为 a、b、c，则有

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

类似地还有

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B.$$

这就是说，三角形一边的平方等于其余两边的平方和再减去这两边与其夹角余弦乘积的两倍.

因此，在一般三角形中，知道了两边一夹角，或知道了三边，就可以利用余弦定理求出其他的边和角.

如果 $\triangle ABC$ 中有一角为钝角（譬如图 3-19 中的 $\angle C$），过 B 点引 AC 的垂线 BD，因为

$$CD = a\cos(180^\circ - C),$$

$$BD = a\sin(180^\circ - C),$$

由 $AB^2 = BD^2 + (AC + CD)^2$ 可得

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(180^\circ - C).$$

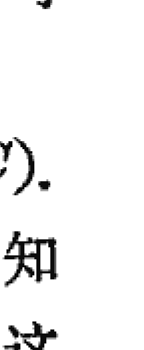


图 3-19

今后在代数第五章中会知道 $\cos(180^\circ - C) = -\cos C$，这样，在钝角时，导出的公式就与锐角时的公式一致.

现在应用余弦定理计算图 3-18 中隧道的长度 c. 我们有

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \\ &= 180^2 + 210^2 - 2\times 180\times 210\times \cos 52^\circ 36' \\ &= 32400 + 44100 - 75600\times 0.60738 \\ &= 30582, \end{aligned}$$

开方得

$$c = \sqrt{30582} \approx 175,$$

即隧道长度约为 175 米.

三、应 用 举 例

[例 1]　相距 2000 米的东、西炮台 B 和 A（图 3-20），同时发现入侵的敌舰 C，在西炮台 A 处测得敌舰在东偏南 40°，在东炮台 B 处测得敌舰在南偏东 35°，试计算敌舰与两炮台的距离.

解：已知两角和一边，用正弦定理，由于 B 是钝角，所以

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - B)} = \frac{AB}{\sin C},$$

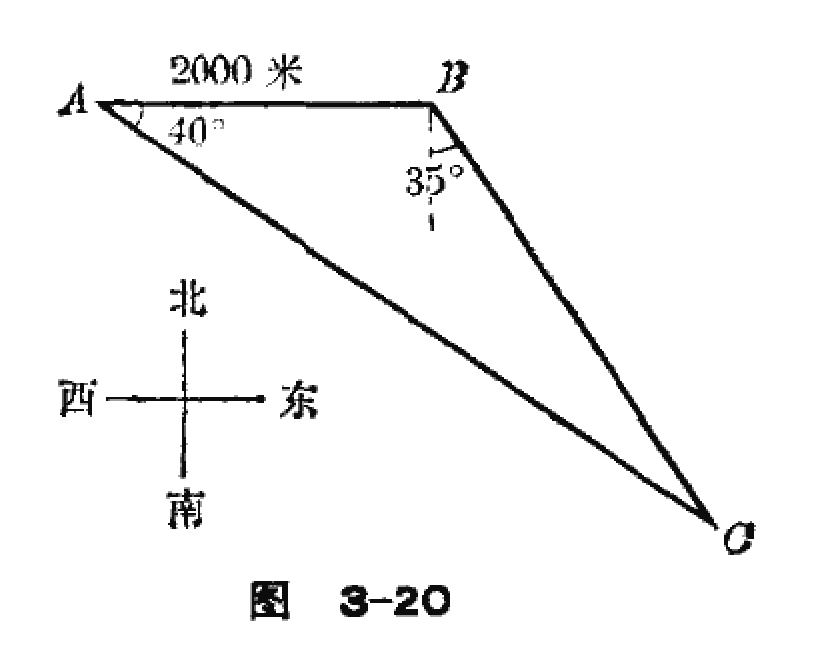


图 3-20

由此得

$$BC=AB\frac{\sin A}{\sin C},\quad AC=AB\frac{\sin(180^\circ-B)}{\sin C}.$$

把 $AB=2000$, $\angle A=40^\circ$, $180^\circ-\angle B=55^\circ$, $\angle C=180^\circ-40^\circ-125^\circ=15^\circ$ 代入上两式得

$$BC=2000\times\frac{0.64279}{0.25882}=4968,$$

$$AC=2000\times\frac{0.81915}{0.25882}=6330.$$

即敌舰距西炮台约 6330 米，距东炮台约 4968 米.

[例 2] 海岛民兵一次参加某部炮兵演习，在观察所里，民兵和解放军战士一起观察"敌情". 测得结果如图 3-21 所示，我观察所 C 到"敌"阵地 B 的距离 $CB=500$ 米，观察所 C 到我炮阵地 A 的距离 $CA=2800$ 米，测出炮观目角 $\alpha=135^\circ$，求我炮阵地到"敌"阵地的距离 AB.

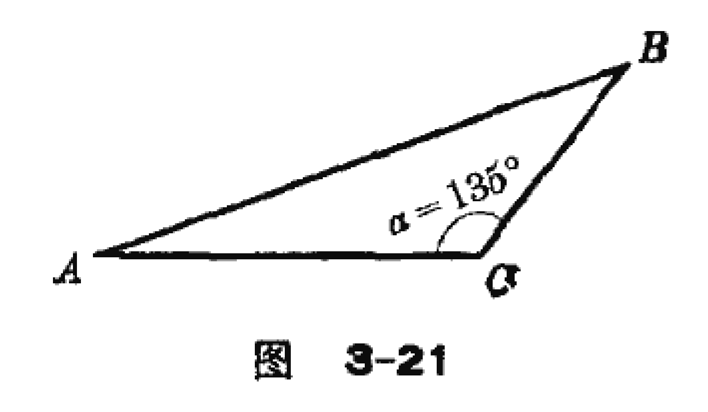


图 3-21

解：由于 $\angle C=135^\circ$ 为钝角，应用余弦定理

$$c^2=a^2+b^2+2ab\cos(180^\circ-C),$$

得

$$c^2=500^2+2800^2+2\times500\times2800\times\cos45^\circ$$
$$=250000+7840000+2800000\times0.7071$$
$$=10069880,$$

两边开方得

$$c=\sqrt{10069880}\approx3173.$$

由此可知，我炮阵地到“敌”阵地的距离约为 3173 米.

[例 3]　要知道石坝对地面的斜角 $\angle C$，可把一竹竿斜靠在石坝旁(图 3-22)，已知竹竿长 $AB=3.5$(米)，$AC=1.2$(米)，$CB=2.8$(米)，求 $\angle C$.

解：由于石坝对地面的倾角 $\angle C$ 为锐角，所以 $\angle ACB$ 为钝角，利用余弦定理得

$$\cos(180^\circ-\angle ACB)=\frac{c^2-a^2-b^2}{2ab}$$
$$=\frac{3.5^2-2.8^2-1.2^2}{2\times2.8\times1.2}=\frac{2.97}{6.72}=0.44196,$$

所以石坝对地面的倾角为

$$180^\circ-\angle ACB=63^\circ46'。$$

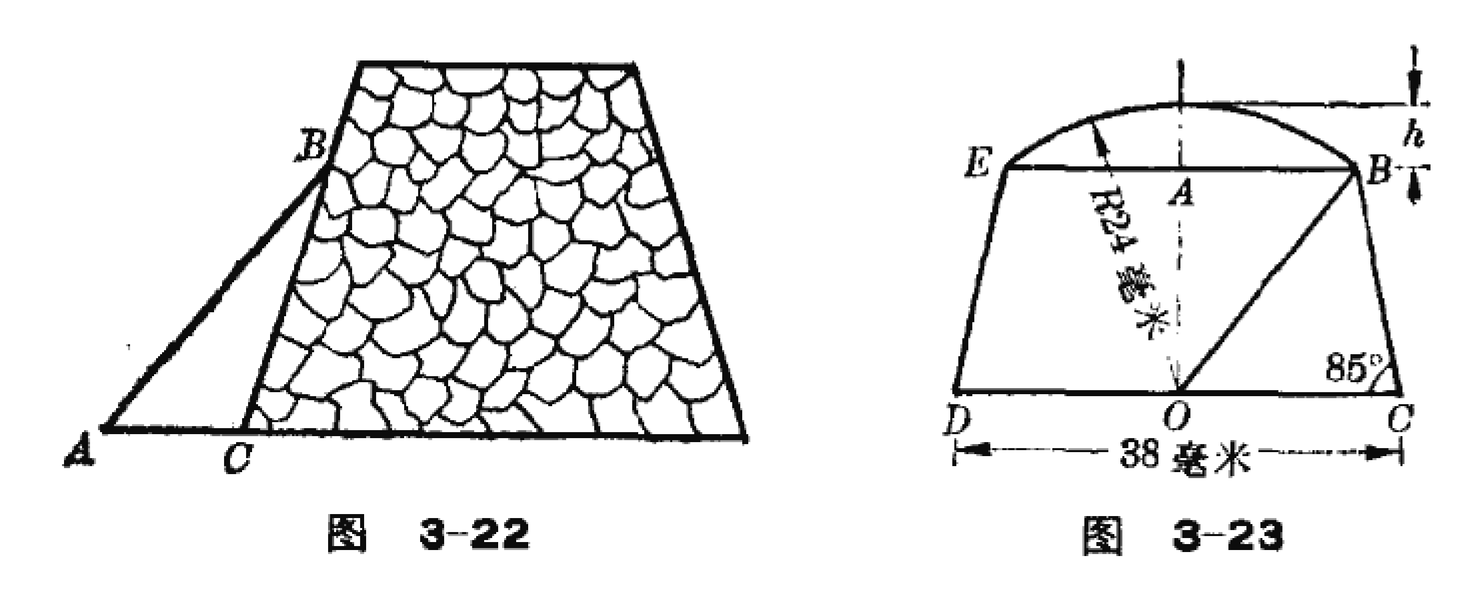


图 3-22　　　　图 3-23

[例 4]　车工在加工球面圆台时，必须先求出圆台上底直径 BE，再求出球面部分的高 h，才能车出球面部分．已知球面圆台轴截面尺寸如图 3-23 所示，求 BE 和 h.

解：因为 $\triangle AOB$ 是一个直角三角形，而 $BE=2AB$，$h=24-AO$，因此，为了求出 BE、h，首先必须求出直角三角形 AOB 中的两条直角边 AB、AO. 而要求出这两条直角边，又必须先求出 $\triangle AOB$ 中的一个锐角 AOB. 为此，在 $\triangle BOC$ 中应用正弦定理求出 $\angle OBC$，就可推出 $\angle AOB$.

在 $\triangle BOC$ 中，已知 $\angle C=85°$，$OC=19$，$OB=24$，用正弦定理得

$$\frac{24}{\sin 85°}=\frac{19}{\sin\angle OBC},$$

即

$$\sin\angle OBC=\frac{19}{24}\sin 85°$$

$$=\frac{19}{24}\times 0.99619\approx 0.78865,$$

查表得

$$\angle OBC=52°4'.$$

$$\therefore\quad \angle BOC=180°-85°-52°4'=42°56',$$

于是

$$\angle AOB=90°-42°56'=47°4'.$$

在直角三角形 AOB 中，利用正弦和余弦可得

$$AB=24\sin 47°4'=24\times 0.73215\approx 17.57,$$

$$AO=24\cos 47°4'=24\times 0.68115\approx 16.35,$$

所以

$$BE=2AB=2\times 17.57=35.14,$$

$$h=24-AO=24-16.35=7.65.$$

因此，球面圆台的上底直径约为 35.14 毫米，球面的高约为 7.65 毫米.

[例 5] 上海工人在设计三十二吨自卸式载重汽车时，

采用了先进的液压机构，需要计算油泵顶杆的长度，如果车斗与水平线所成的最大倾角为 60° (图 3-24)，油泵顶点 B 与支点 A 的连线长为 1.95 米，且与水平线所成斜角 6°20′，两支点 A、C 间的距离是 1.4 米，试计算油泵顶杆 BC 的长.

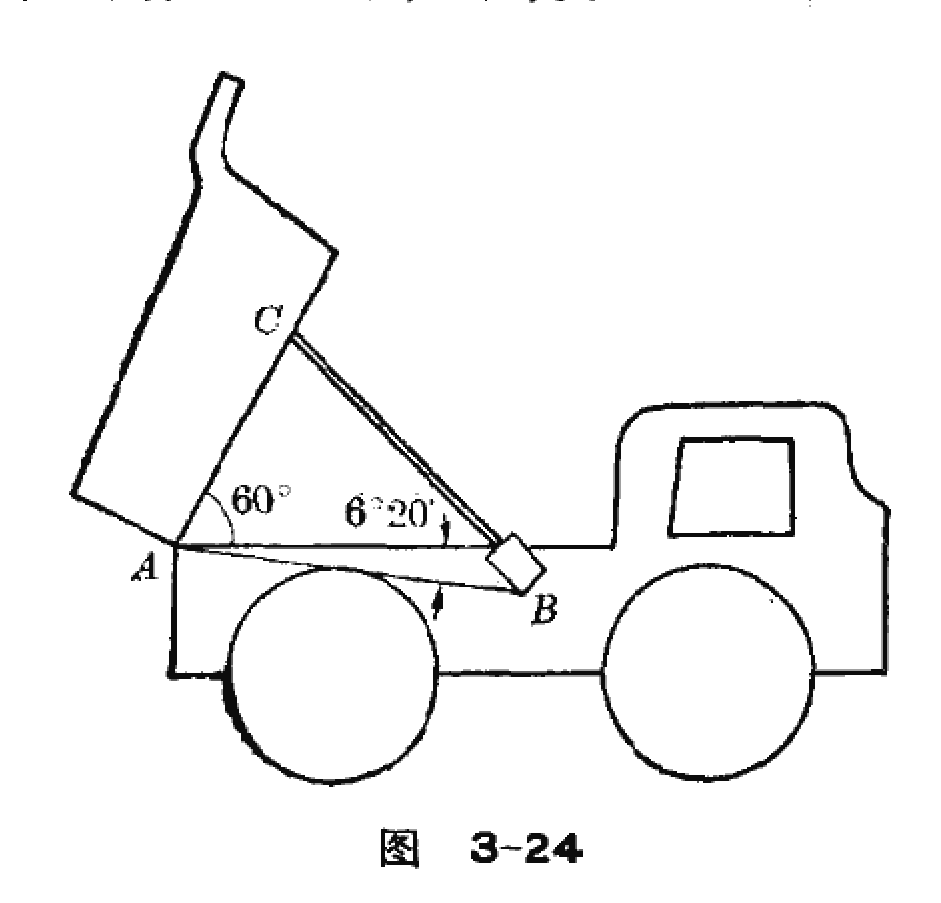


图 3-24

解：在 $\triangle ABC$ 中，$AB=1.95$ 米，$AC=1.4$ 米，用余弦定理

$$CB^2=1.4^2+1.95^2-2\times1.4\times1.95\times\cos 66°20'$$
$$=1.96+3.8025-5.46\times0.4014$$
$$=3.5709,$$

两边开方得

$$CB=\sqrt{3.5709}\approx1.89.$$

即油泵顶杆的长为 1.89 米.

在生产实践中，经常会遇到象力、速度等一类量，它们不仅有大小，还有方向，我们把这种有大小和方向的量叫做向量，通常用一个有方向的线段来表示，线段的长度表示它的大小，线段的方向表示它的方向.

从物理学中知道，力的合成和分解都遵守平行四边形法

则．要求两个力 F_1、F_2 的合力，可用这两个力做邻边构成平行四边形，过两力交点的对角线就表示合力 F 的大小和方向(图 3-25)．

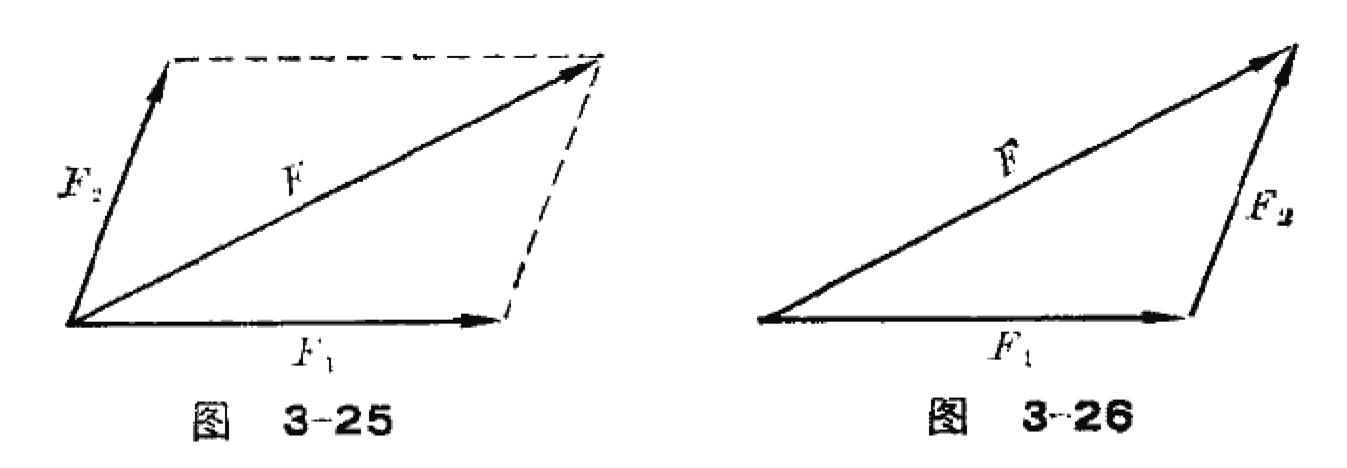


图 3-25　　　　图 3-26

根据平行四边形的性质，合成法则也可以用三角形法则代替，即把分力 F_2 经过平移使它的起点与分力 F_1 的终点重合，这时，从 F_1 的起点到 F_2 的终点的连线所表示的向量就是合力 F(图 3-26)．

[例 6]　用绳索起吊货物 (图 3-27(甲))，如果两绳索与铅垂线的交角为 30° 与 45°，货物重 $P=1000$ 公斤，试求两绳索所承受的拉力．

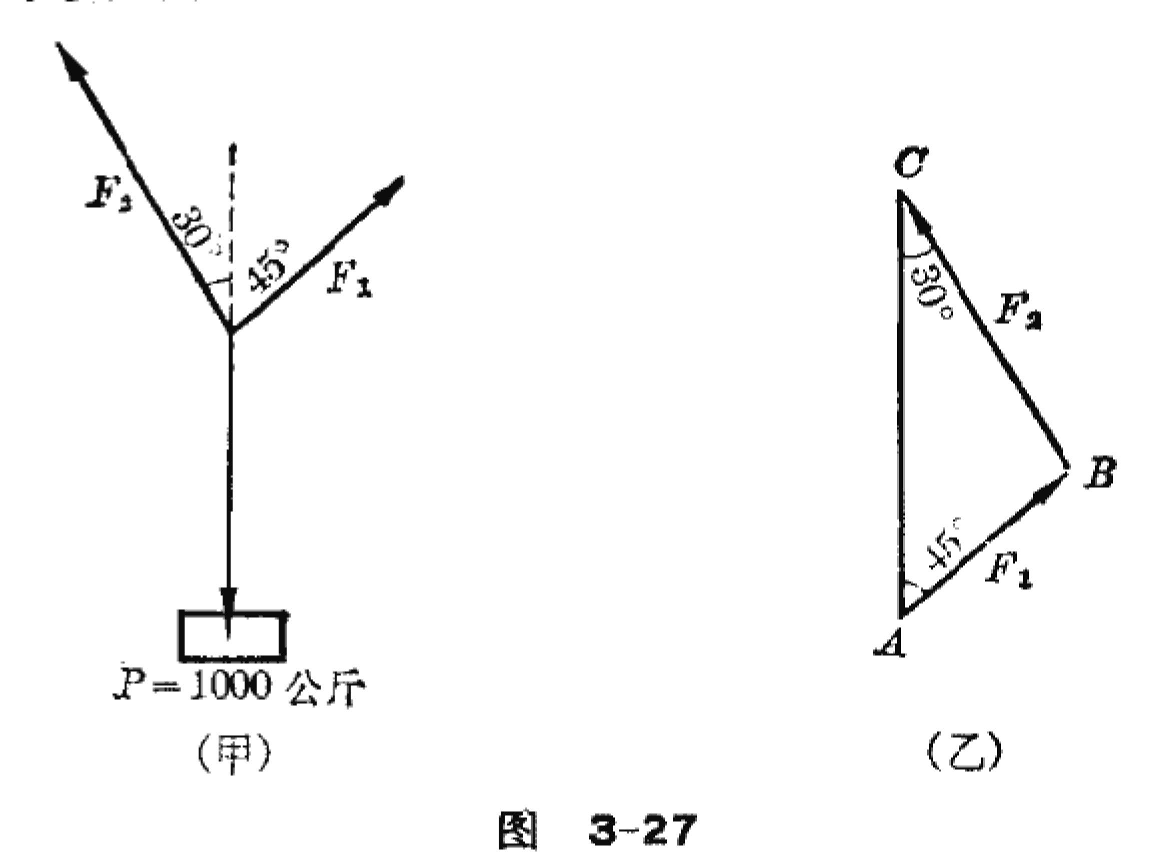


图 3-27

解：这里共有三个力：物重 P、两根绳子的拉力 F_1、F_2，起重时，两个拉力的合力应当与物重平衡，所以问题是已知合

力 $P=1000$ 公斤，求分力 F_1, F_2. 根据题意，在图 3-27 (乙) 的 $\triangle ABC$ 中，已知 $AC=1000$ 公斤，$\angle A=45°$, $\angle C=30°$, 要求出 AB, BC.

由于 $\angle B=180°-\angle A-\angle C=180°-45°-30°=105°$ 是一个钝角，正弦定理取以下形式：

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin(180°-B)}=\frac{AB}{\sin C}.$$

从而

$$BC=AC\frac{\sin A}{\sin(180°-B)},\quad AB=AC\frac{\sin C}{\sin(180°-B)}.$$

所以

$$BC=1000\frac{\sin 45°}{\sin 75°}=732,$$

$$AB=1000\frac{\sin 30°}{\sin 75°}=517.$$

即绳索的拉力 F_1 为 517 公斤，F_2 为 732 公斤.

［例 7］ 轮渡以每小时 15 公里的速度沿 OB 方向行驶，水流以每小时 4 公里的速度沿 OA 方向流动，OA 与 OB 的夹角为 100°，求轮渡实际航行的速度和方向.

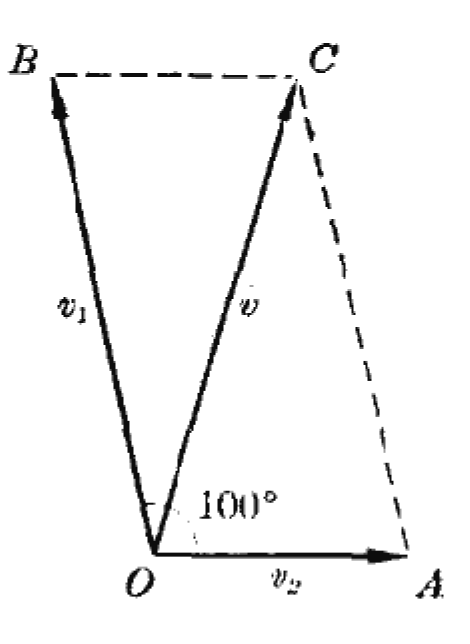


图 3-28

解：速度是向量，这里分速度 $v_1=15$ 公里/小时，$v_2=4$ 公里/小时，求合成速度 v 及 v 与 v_2 的夹角，这就相当于在图 3-28 的 $\triangle AOC$ 中，已知 $AC=15, OA=4$ 及其夹角 $\angle A=80°$，求 OC 及 $\angle AOC$.

应用余弦定理得

$$OC^2=OA^2+AC^2-2OA\cdot AC\cos A$$
$$=4^2+15^2-2\times4\times15\times\cos 80°\approx220.16,$$

所以

$$v=OC=\sqrt{220.16}=14.83.$$

再利用正弦定理求 $\angle AOC$,

$$\sin\angle AOC=\frac{AC}{OC}\sin A=\frac{15}{14.83}\sin 80^\circ=0.99609,$$

查表得

$$\angle AOC=84^\circ 56'.$$

由此可知,轮渡实际航行速度为每小时 14.83 公里,它与水流方向成 $84^\circ 56'$ 的角.

小　　结

1. 正弦定理:在 $\triangle ABC$ 中,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

适用于下列情况:

(1) 已知两角及任何一边,求其他两边;

(2) 已知两边及其中一边的对角,求其他的边和角.

2. 余弦定理:在 $\triangle ABC$ 中,

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \quad 或 \quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

适用于下列情况:

(1) 已知两边及其夹角,求另一边;

(2) 已知三边求角.

习　　题

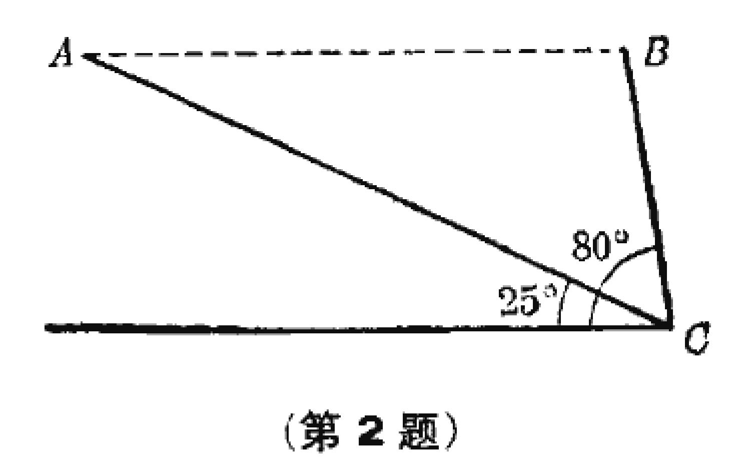
1. 在 $\triangle ABC$ 中,

(1) 已知 $a=3$, $\angle A=60^\circ$, $\angle B=45^\circ$, 求 b, c;

(2) 已知 $a=4$, $b=6$, $c=5$, 求 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$;

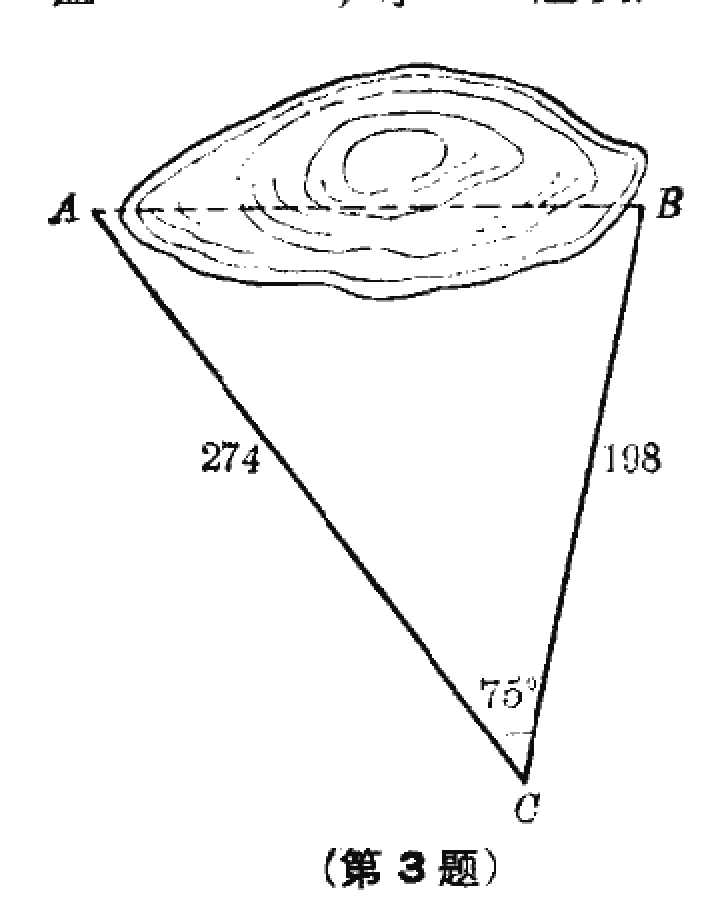
(3) 已知 $a=9$, $b=2$, $\angle C=60^\circ$, 求 c.

2. 解放军战士遵照毛主席"**全力以赴，务歼入侵之敌**"的教导，一天在我沿海某地上空发现敌机一架，测得其仰角为25°，敌机以330米/秒的速度作水平飞行，6秒钟后到达B处被我军击落，这时测得其仰角为80°，求此时敌机到观察站C的距离.

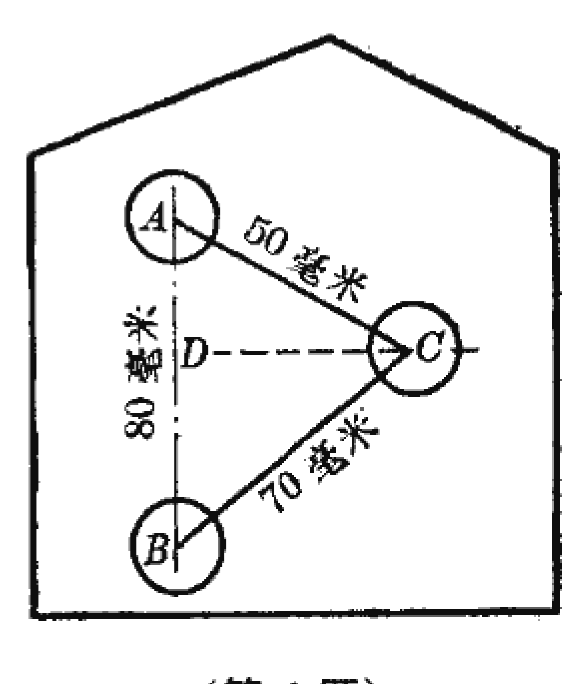


（第2题）

3. 在开山引水前，欲测山洞之长AB，为此在山侧选取一点C，测得C到山洞入口处A的距离为274米，C到出口处B的距离为198米，$\angle ACB=75°$，求AB之长.



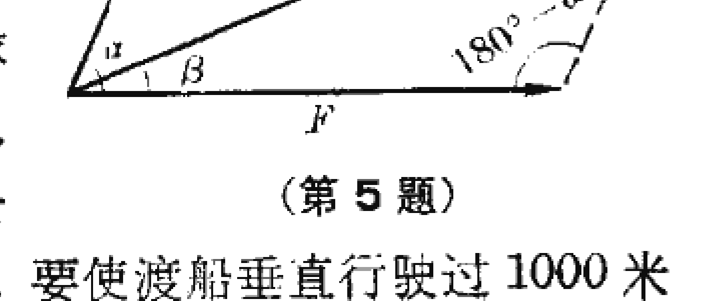
（第3题）



（第4题）

4. 如图，镗工师傅在加工齿轮箱侧面A、B、C三孔时，顺次镗好A、B两孔后，把镗杆从B退到D，再从D向右移动工作台，使镗杆对准C，然后加工C孔. 试根据图示尺寸，求BD和DC.

5. 作用于一点的两个力$P=36$公斤，$F=82$公斤，两力的夹角$\alpha=77°10'$，求合力R的大小及R与F所夹的角β.



（第5题）

6. 静水中行船的速度为每小时15公里. 如遇每小时6公里的河水流速，要使渡船垂直行驶过1000米宽的河面，求行船方向及到达对岸所需的时间.

复 习 题

1. 把下列各三角比化为余角的三角比:

(1) $\sin 80°10'$; (2) $\cos 47°$;

(3) $\operatorname{tg} 70°4'$; (4) $\operatorname{ctg} 62°30'$.

2. 由下列已知三角比值,求作角 α:

(1) $\cos\alpha=\frac{2}{5}$; (2) $\operatorname{tg}\alpha=0.75$.

3. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$,求 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

4. 证明下列恒等式:

(1) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha=1$;

(2) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$;

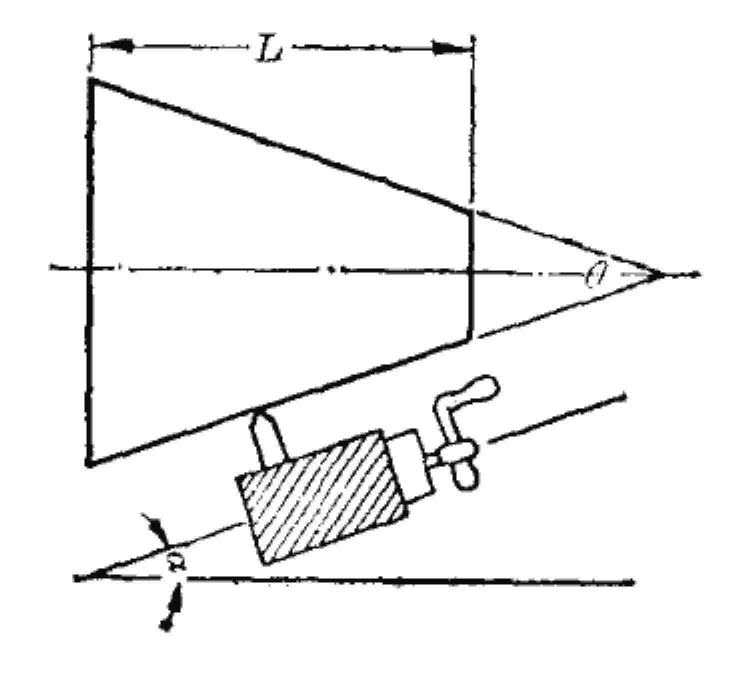
(3) $(\sin x+\operatorname{tg} x)(\cos x+\operatorname{ctg} x)=(1+\sin x)(1+\cos x)$;

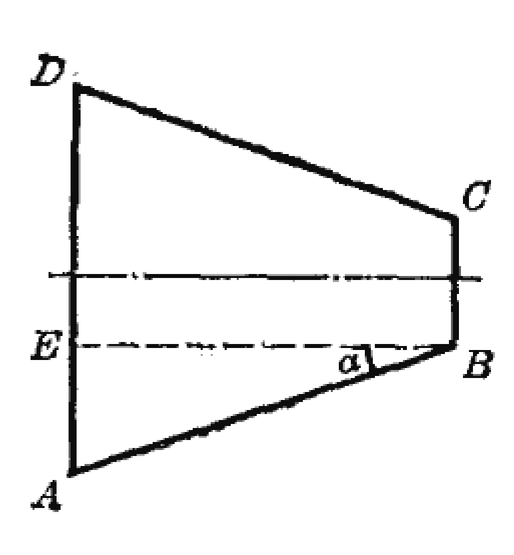
(4) $(1+\sin x)\operatorname{tg}^2 x(1-\sin x)=\sin^2 x$.

5. 南京长江大桥的正桥桥面到水平地面高约10.26米,引桥长约2565米,试求引桥桥面与水平地面的夹角 α.

6. 等腰三角形的顶角等于 $78°4'$,高为 38.5 厘米,求这三角形的两腰和面积.

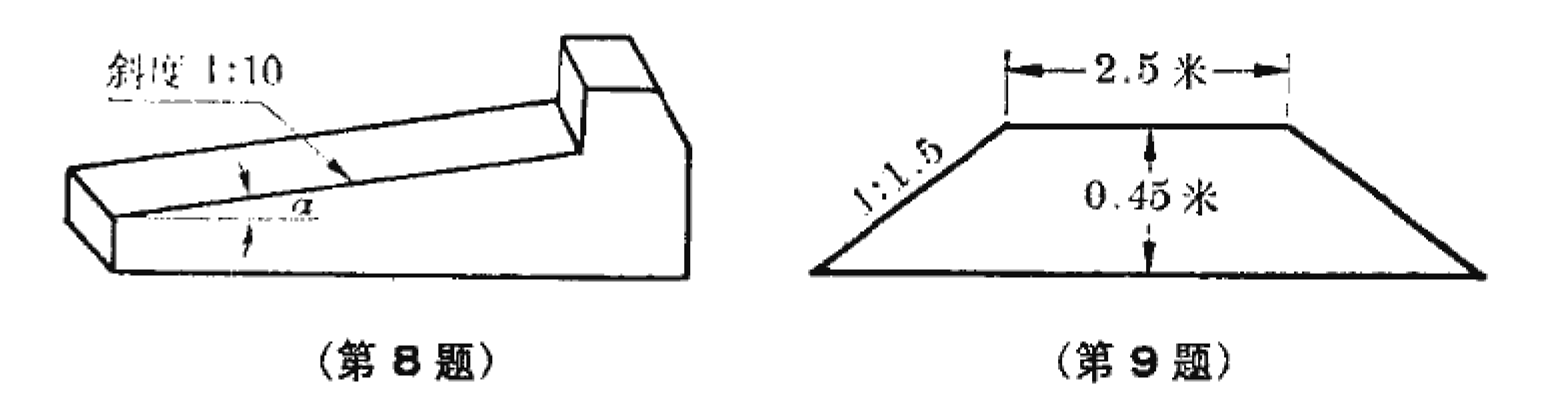
7. 圆台形工件叫做锥形工件(或称退拔工件),已知锥形工件大头直径 $AD=30$ 毫米,小头直径 $BC=17.4$ 毫米,长 $L=60$ 毫米,问车削时,小拖板应转多少角度?





(第 7 题)

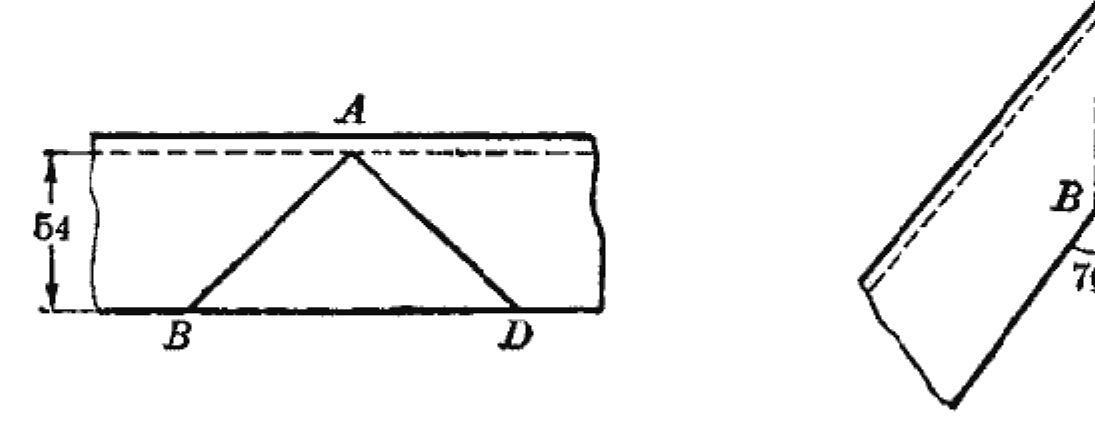
8. 某机器厂工人，在加工如图所示的钩头斜键时，要计算出斜角α，已知钩头的斜度是1:10，求斜角α.



（第 8 题）　　　　（第 9 题）

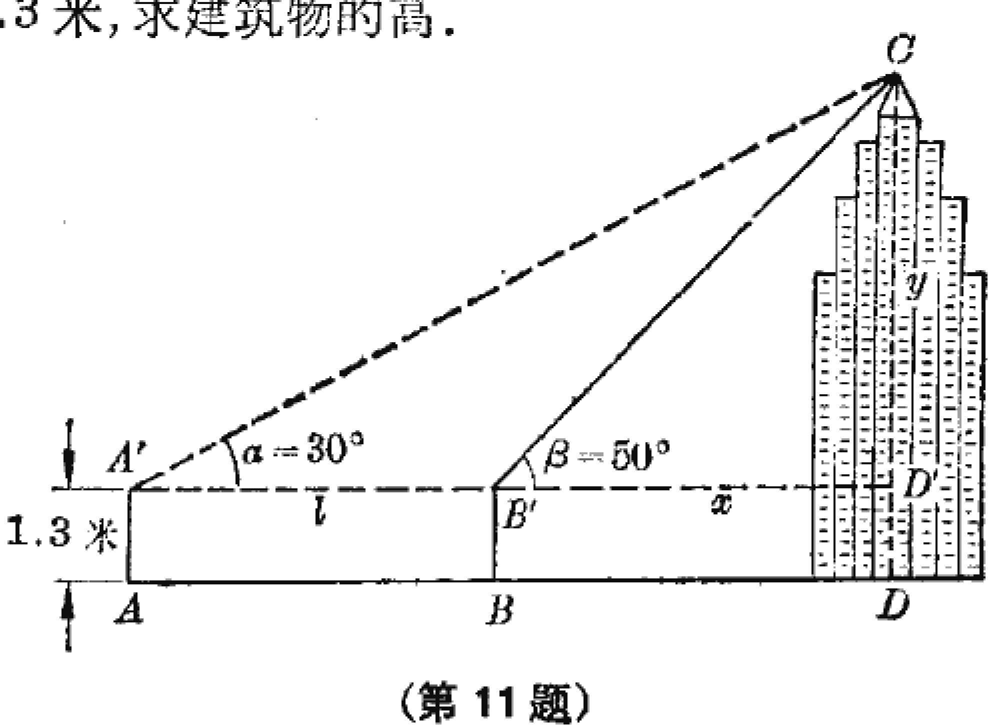
9. 一铁路路基顶宽2.5米，高0.45米，路面的坡度为1:1.5，求路基底部的宽度.

10. 钳工师傅要把一条角钢在A点弯成一个70°的架子，就要在角钢上剪去一个等腰三角形ABD，求BD的长.



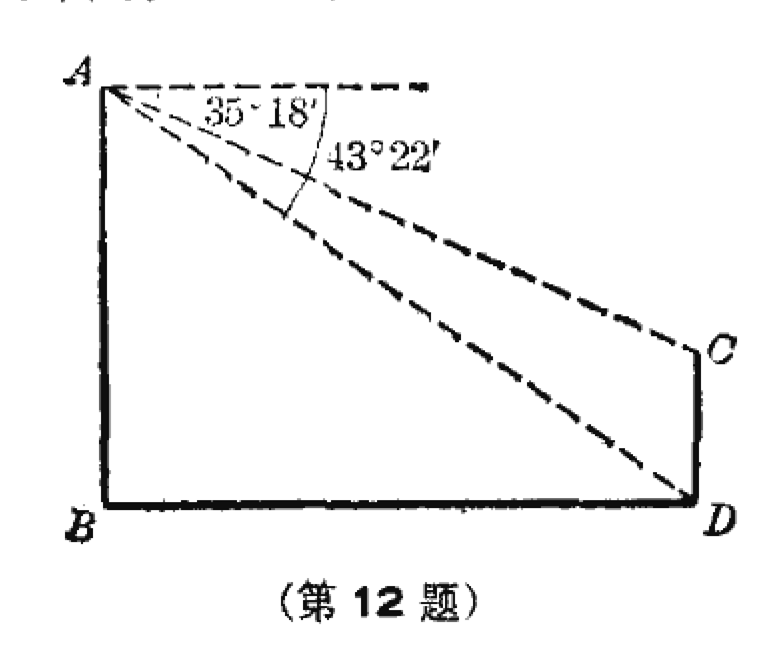
（第 10 题）

11. 为了测量建筑物CD的高度，可在地面上选取两点A、B(使A、B、D三点在一直线上)，用经纬仪分别在A、B两点观测建筑物顶C，测得仰角分别为$\alpha=30°$，$\beta=50°$，且量得$AB=30$米，测量仪器高$AA'=1.3$米，求建筑物的高.



（第 11 题）

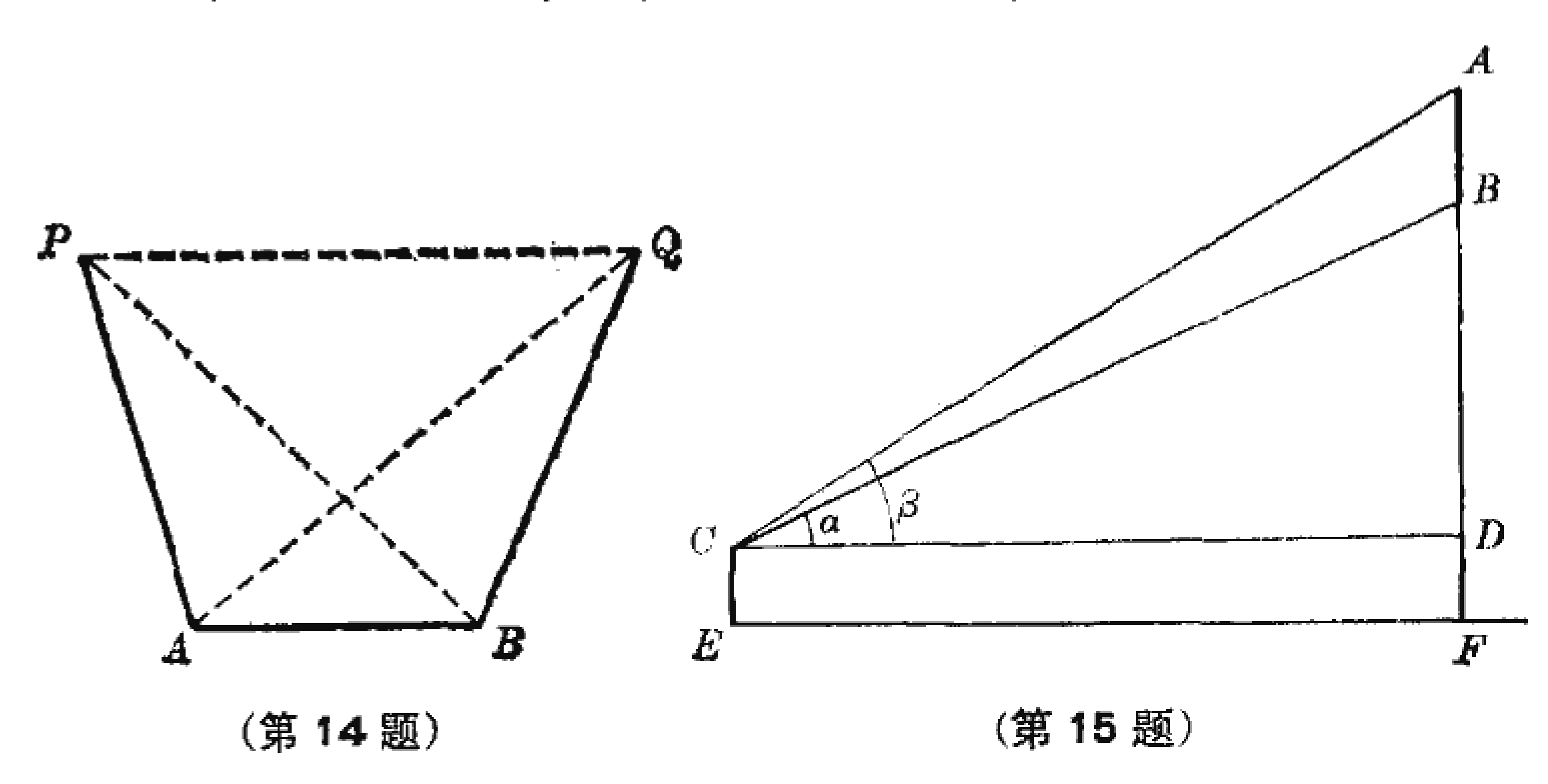
12. 两个建筑物 AB 和 CD 的水平距离为 72.6 米，从其中一个建筑物的顶点 A 测得另一个建筑物的顶 C 和底 D 的俯角分别为 $35°18'$，$43°22'$，求这两个建筑物的高.



(第 12 题)

13. 设 A, B 为我方两阵地，相距 1000 米，C 为"敌"阵地，在 A、B 分别测得 $\angle CAB=62°30'$，$\angle CBA=72°15'$，问我方两阵地各距"敌"阵地多远?

14. 在海岸不远处有两座小岛 P、Q，要测量它们之间的距离，可在岸边取两点 A、B，量得 $AB=50$ 米，又测得 $\angle PAB=105°$，$\angle QAB=30°$，$\angle PBA=45°$，$\angle QBA=135°$，试求两小岛间的距离 PQ.



(第 14 题)　　(第 15 题)

15. 某工程，为了测量出地面上的 E 点与山顶 B 点的水平距离 EF，把标尺 AB 插在山顶，从 C 点测得 B 点的仰角 $\alpha=7°36'$，A 点的仰角 $\beta=9°18'$，并从标尺上的刻度得知 $AB=3$ 米，求 EF.

16. 将重物 300 公斤，用两根绳索起吊，绳索与铅垂线的夹角分别为

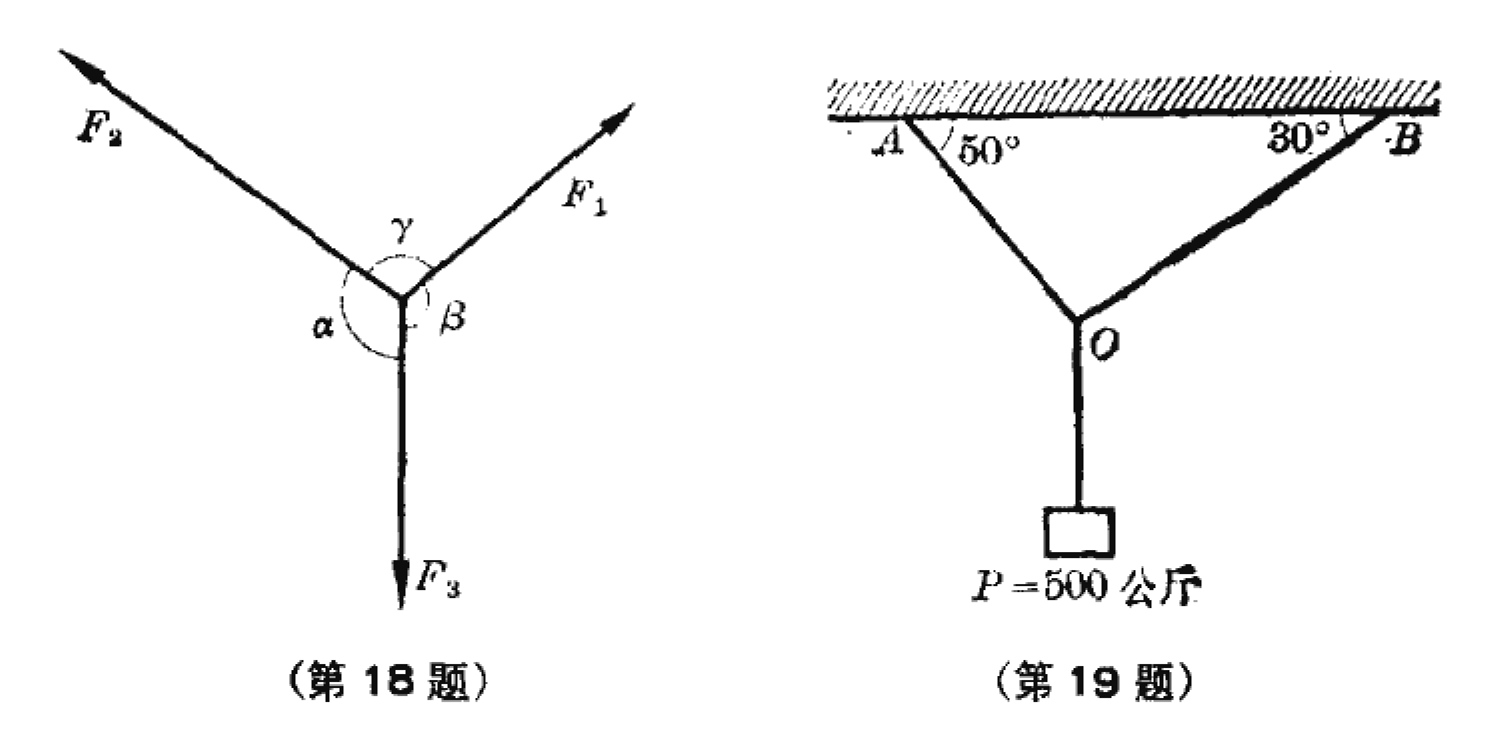
47°14′, 18°55′, 求这两根绳索所受的力.

17. 已知两个力 $F_1=39$ 公斤，$F_2=68$ 公斤，这两个力的平衡力是 $F_3=85$ 公斤，求平衡力与这两个力中每一个力所夹的角.

18. (1) 如果三个力 F_1、F_2、F_3 平衡，并且夹角的记号如图所示，求证

$$\frac{F_1}{\sin\alpha}=\frac{F_2}{\sin\beta}=\frac{F_3}{\sin\gamma};$$

(2) 已知 $F_1=100$ 公斤，$\beta=145°$，$\gamma=92°$，求 F_2 和 F_3.



（第 18 题）　　（第 19 题）

19. 如图所示，OA 和 OB 为两条钢绳，它们分别与水平线成 50° 和 30° 的角. 今在 O 点挂 $P=500$ 公斤的重物，试利用上题的结论求 OA 和 OB 所受的力.

第四章　圆

在第一章里已经提过圆和圆的一些基本性质，知道圆的位置和大小分别由圆心位置和半径长短决定，当圆心和半径确定之后，圆也就确定了.

那么，怎样确定一个圆的圆心位置和半径的长短呢？这在生产实际中是常常需要解决的问题. 比如有一个残缺不全的皮带轮，如何求出它的半径，以便重新配制一个呢？又如何在一块圆板上定出圆心的位置，以便划线呢？

工人老师傅从长期经验的积累中，创造了各种工具，用不同方法来解决这个问题. 为要弄清各种方法的原理，有必要对圆的性质作进一步研究.

第一节　圆内的角和弦

这里我们先来介绍工人老师傅对残缺的皮带轮是怎样重新配制的.

他们先是把皮带轮的一段圆弧描在纸上，再在圆弧上任取 A、B、C 三点，如图 4-1，连 AB、BC，分别画 AB、BC 的垂直平分线 MN、PQ，相交于 O，O 便是这个圆弧的圆心. 然后以 OA 做半径，重新配一个新的皮带轮，它便和原来的完全一样.

为什么这样画以后，量得的 OA 就是所求皮带轮的半径

呢？要明白这个道理，就要知道下面的一些圆的性质。

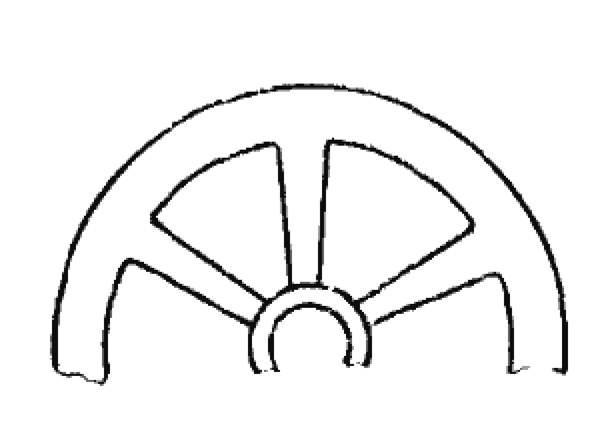
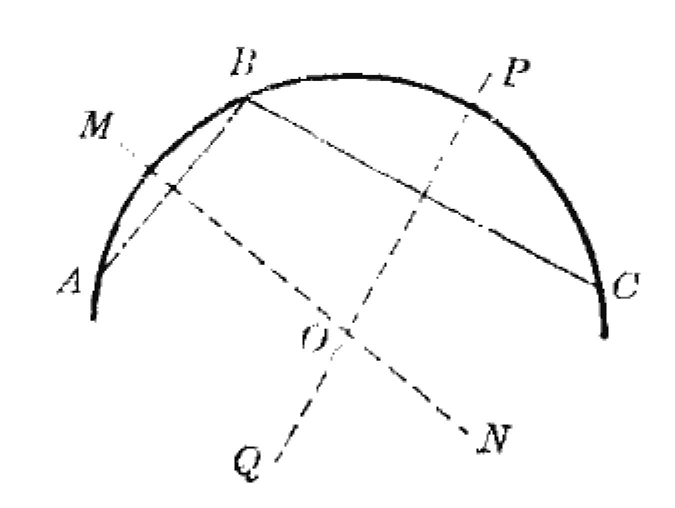



图 4-1

一、弦和直径

弦有如下一条重要性质：

定理 弦的垂直平分线通过圆心。

已知 AB 是 $\odot O$ 的一条弦，CD 是 AB 的垂直平分线，如图 4-2.

求证 CD 通过圆心 O.

证明 连 OA、OB，因 $OA=OB$，所以 O 点一定落在线段 AB 的垂直平分线 CD 上，也就是说，CD 必通过圆心 O.

图 4-2

在图 4-1 的画法中，因为 MN 是弦 AB 的垂直平分线，它通过圆心；同样 PQ 也通过圆心，所以它们的交点 O 便是弧 ABC 所在圆的圆心，OA 便是所求的半径.

上面这个画法也给我们指出：经过不在一直线上的三点，可以画一个圆，也只可以画一个圆. 这种画法叫做三点定圆法. 显然，和圆上三点等距离的点，便是这个圆的圆心. 如果

把这三点连成一个三角形，那么，这个圆就叫做三角形的外接圆，外接圆的圆心叫做三角形的外心，如图 4-3 所示．由此，也知道三角形三边的垂直平分线相交于一点．

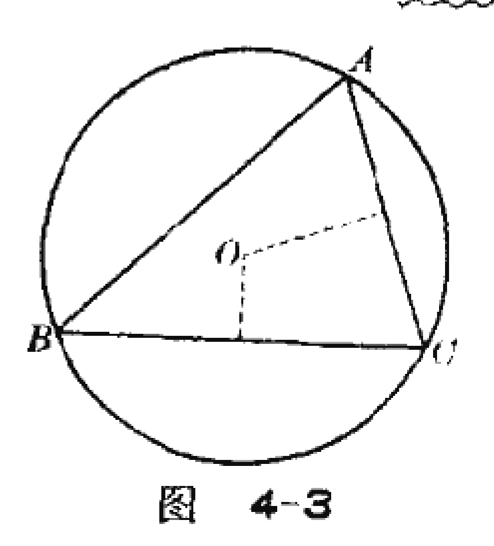


图 4-3

［例 1］ 测得残缺圆轮的弦 AB 长 320 毫米，矢高 CD 为 46.2 毫米，求圆轮的直径．

解：矢高 CD 是指弦 AB 的垂直平分线介于弦与对弧间的线段长，所以它所在的直线经过圆心 O（图 4-4）．

设圆轮半径为 R，因

$$AD=\frac{AB}{2}=160,$$

$$OD=OC-DC=R-46.2.$$

连 AO，在直角三角形 ADO 中有

$$AO^2=AD^2+OD^2,$$

即

$$R^2=160^2+(R-46.2)^2$$

$$=25600+R^2-92.4R+2134.44,$$

$$\therefore\quad R\approx 300,$$

图 4-4

因此，圆轮的直径约为 600 毫米．

［例 2］ 手柄圆球直径 $D=25$ 毫米，轴的直径 $d=15$ 毫米，在加工时需要求出 L 的值（图 4-5）．

解：在手柄圆球的剖面图中，从圆心 O 向弦 AB 作垂线 OC，则 C 平分 AB．

$$\therefore\quad BC=\frac{AB}{2}=\frac{d}{2}=7.5.$$

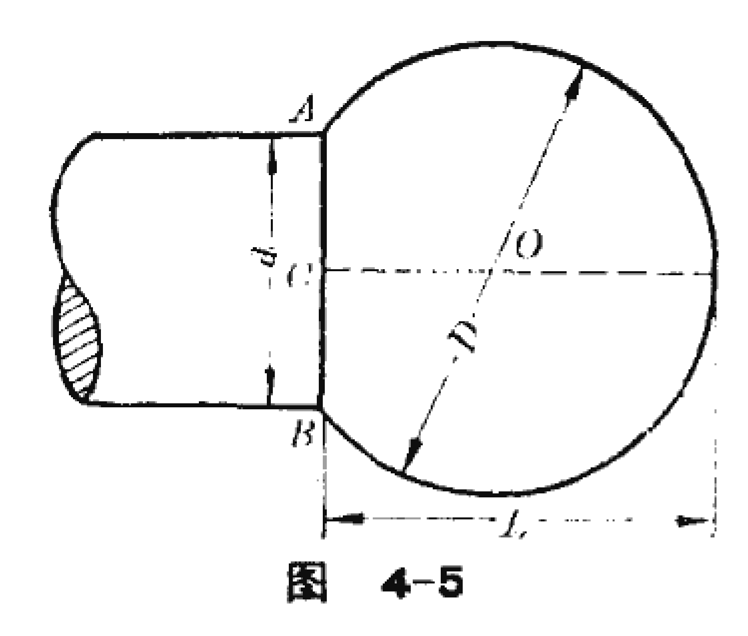


图 4-5

又 $$OB=\frac{D}{2}=12.5,$$

$$\therefore \quad CO=\sqrt{OB^2-BC^2}=\sqrt{12.5^2-7.5^2}$$
$$=\sqrt{(12.5+7.5)(12.5-7.5)}$$
$$=\sqrt{20\times5}$$
$$=10,$$

$$\therefore \quad L=10+12.5=22.5\ (\text{毫米}).$$

其次，我们再介绍老师傅找圆心的另一种方法.

老师傅为要确定飞轮的圆心，以便进行划线，创造了“角尺定心法”. 他们把角尺的顶点 C 靠在圆周上，尺的两边分别与圆相交于 A、B 两点，连接 AB. 然后把角尺调换一个位置，用同样方法，再画出另一条弦 $A'B'$，他们便把 AB 和 $A'B'$ 的交点 O 作为所求的圆心(图 4-6).

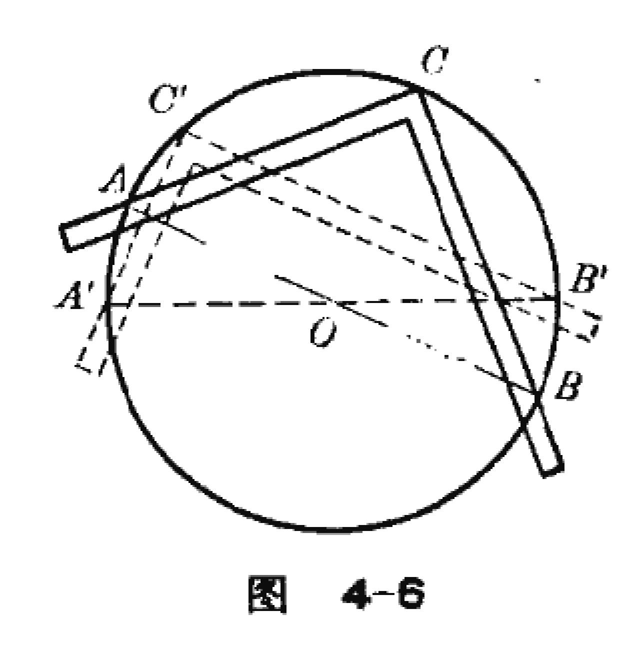


图 4-6

这又是为什么呢？原来圆还有下面的性质.

二、圆心角和圆周角

顶点在圆心的角叫圆心角. 顶点在圆上并且两边都和圆相交的角叫圆周角. 如图 4-7, $\angle AOB$ 是圆心角，$\angle CDE$ 是圆周角.

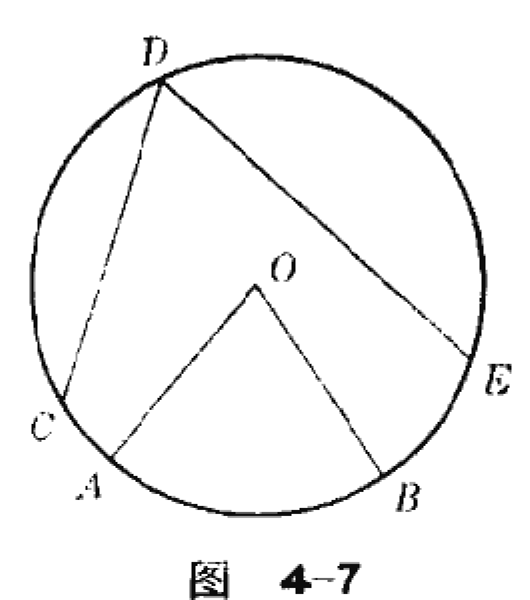


图 4-7

定理 圆周角为直角时所对的弦是直径.

已知 在图 4-8 中，圆周角 $\angle ACB=90^\circ$.

求证 AB 是圆的直径.

证明 根据直角三角形斜边中点到三顶点等距离这一性质，这里 AB 是斜边，取 AB 的中点 O，那么

$$OA=OB=OC,$$

因此 O 是圆心，所以 AB 是直径.

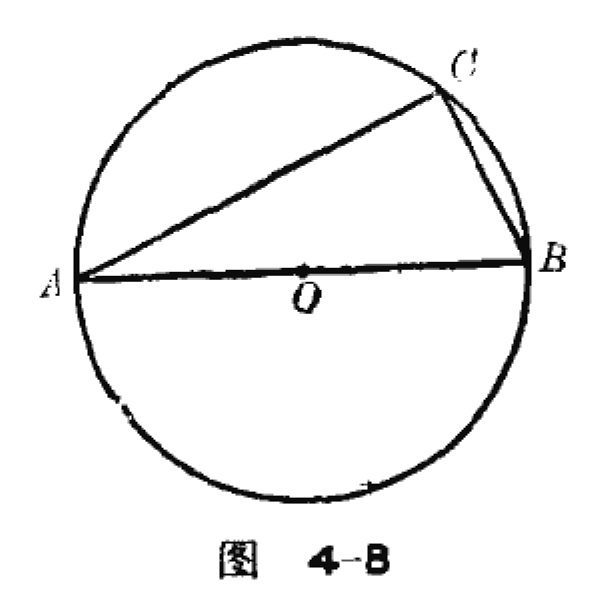


图 4-8

这就说明了工人老师傅应用角尺定心器的道理了. 原来他两次所画的 AB 和 $A'B'$ 都是直径，所以交点便是圆心. 老师傅们在长期生产实践中，创造了各种找圆心求半径的方法，这再次说明了一个真理："**在某种意义上来说，最聪明、最有才能的，是最有实践经验的战士。**"

再从上面的图形来看，圆周角 $\angle ACB$ 对着半圆 $\overset{\frown}{AB}$，而圆心角 $\angle AOB$ 也同样对着 $\overset{\frown}{AB}$，但这时 $\angle AOB=180°$，而 $\angle ACB$ 为 $90°$，这是说圆周角 $\angle ACB$ 等于对同弧的圆心角 $\angle AOB$ 的一半. 但这里指的仅是一个特例，是不是一般的圆周角与圆心角都有这种关系呢？遵照毛主席教导："**就人类认识运动的秩序说来，总是由认识个别的和特殊的事物，逐步地扩大到认识一般的事物。**"我们再来作一般性的研究.

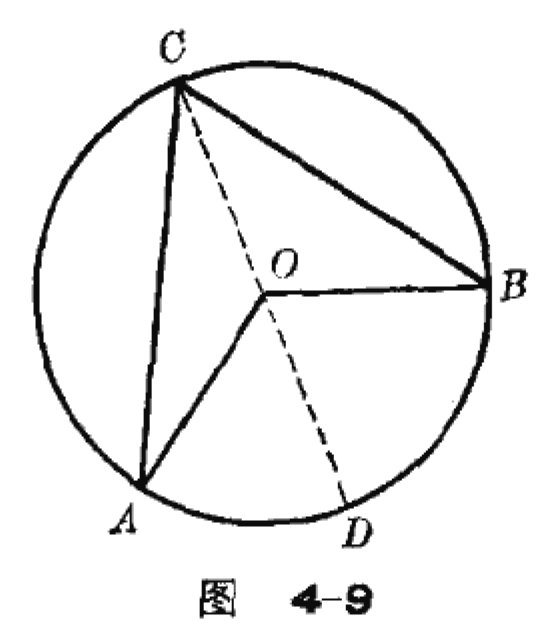


图 4-9

在图 4-9 中，设 $\angle ACB$ 为任意一个圆周角，$\angle AOB$ 为对同弧的圆心角. 过 C 画直径 CD，则有

$$\angle AOD=\angle ACO+\angle CAO=2\angle ACO,$$

$$\angle BOD=\angle BCO+\angle CBO=2\angle BCO,$$

$$\therefore \quad \angle AOD+\angle BOD=2(\angle ACO+\angle BCO),$$

即

$$\angle AOB=2\angle ACB,$$

或

$$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB.$$

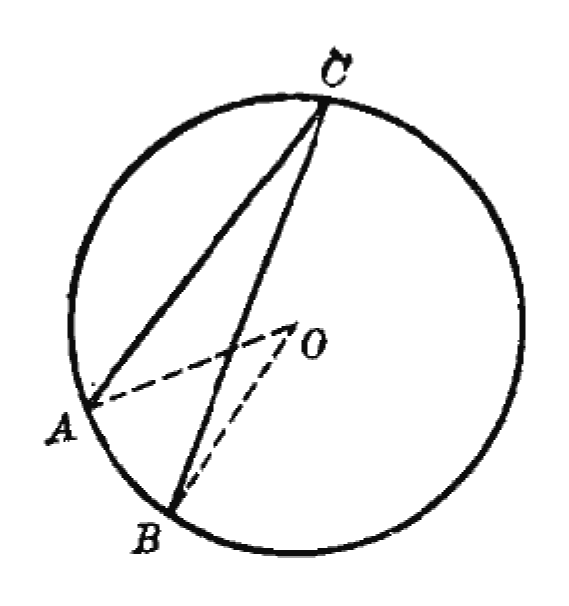


图 4-10

如果圆心落在圆周角的外部(图 4-10)，同样可以证明这个结果（留给读者自己证明）.

由此得

定理 圆周角等于对同弧的圆心角的一半.

还可以推出：半圆上的圆周角是直角，以及对同弧的圆周角相等.

[例 3] 五角星的五个顶点都在同一个圆上（图 4-11），并且

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA},$$

求五角星的每个角的度数.

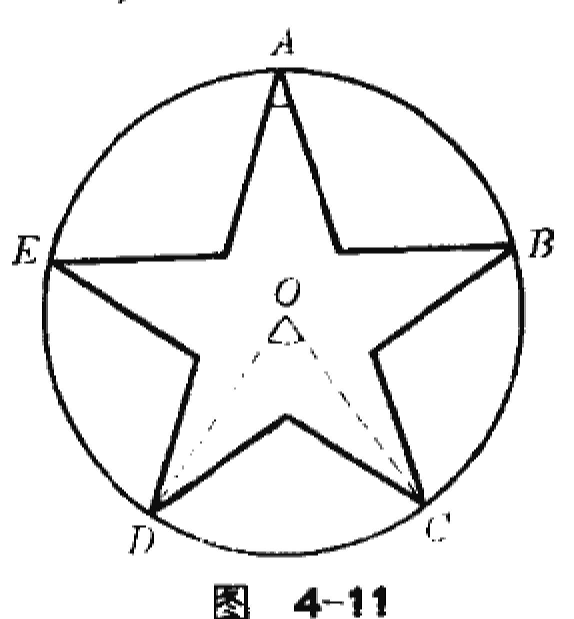


图 4-11

解：五角星的五个顶点把圆周五等分. 因为等弧所对的圆周角相等，所以五角星的五个顶角都相等. 现在只计算 $\angle A$.

因为圆周角 A 对着 $\overset{\frown}{DC}$，它等于对同弧的圆心角 DOC 的一半. 但

$$\angle DOC=\frac{360^\circ}{5}=72^\circ,$$

$$\therefore\quad \angle A=36^\circ.$$

[例 4] 计算奇数齿铣刀的直径.

解：如图 4-12，设铣刀的齿数为 n，要求它的直径 AD，可先用卡尺量出两个齿顶的最大距离 $AB=a$. 因为

图 4-12

齿数为奇数，所以齿顶 B 和 C 关于直径 AD 是对称的.

$$\therefore \quad \angle BOD=\frac{360^\circ}{2n},$$

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{90^\circ}{n}.$$

再通过直角三角形 ABD, 就可求得

$$AD=\frac{AB}{\cos\angle BAD}=\frac{a}{\cos\dfrac{90^\circ}{n}}.$$

[例 5] 把圆周等分后，顺次连接相邻的两个等分点，得出一个圆的内接正多边形. 设圆的半径为 R, 试求内接正 $n(n\geqslant 3)$ 边形一边的长.

解：如图 4-13, 设 $a_n=AB$ 为所求内接正 n 边形的一边长，它所对的中心角为 $\dfrac{360^\circ}{n}$, 作 $\angle O$ 的平分线 OD, 则

$$AB=2AD=2R\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

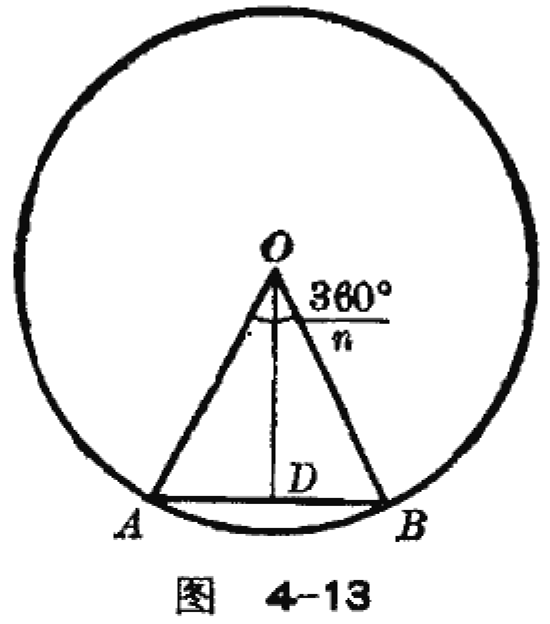


图 4-13

从这个例子可以看到，当 $n=6$ 时，$AB=R$. 即圆内接正六边形一边的长等于圆的半径.

为了便于等分圆周，劳动人民创造了《等分圆周表》. 在这表中，直径系数 k 即 $\sin\dfrac{180^\circ}{n}$, 当知道直径 d 和 n 时，只要在表中查出 k 的值，再和 d 相乘，就能求得相邻两个等分点间的距离 a_n.

例如把半径为 10 厘米的圆七等分. 这里 $n=7$, $d=20$, 从表中查得

$$k_7 = 0.4339,$$

于是

$$a_7 = 20 \times 0.4339 = 8.678\ (厘米),$$

然后以 8.678 厘米为半径，连续在圆上截取七次，就能把圆近似地七等分了.

小　结

1. 弦和直径：

弦的垂直平分线通过圆心；

三角形三边的垂直平分线相交于一点(外心).

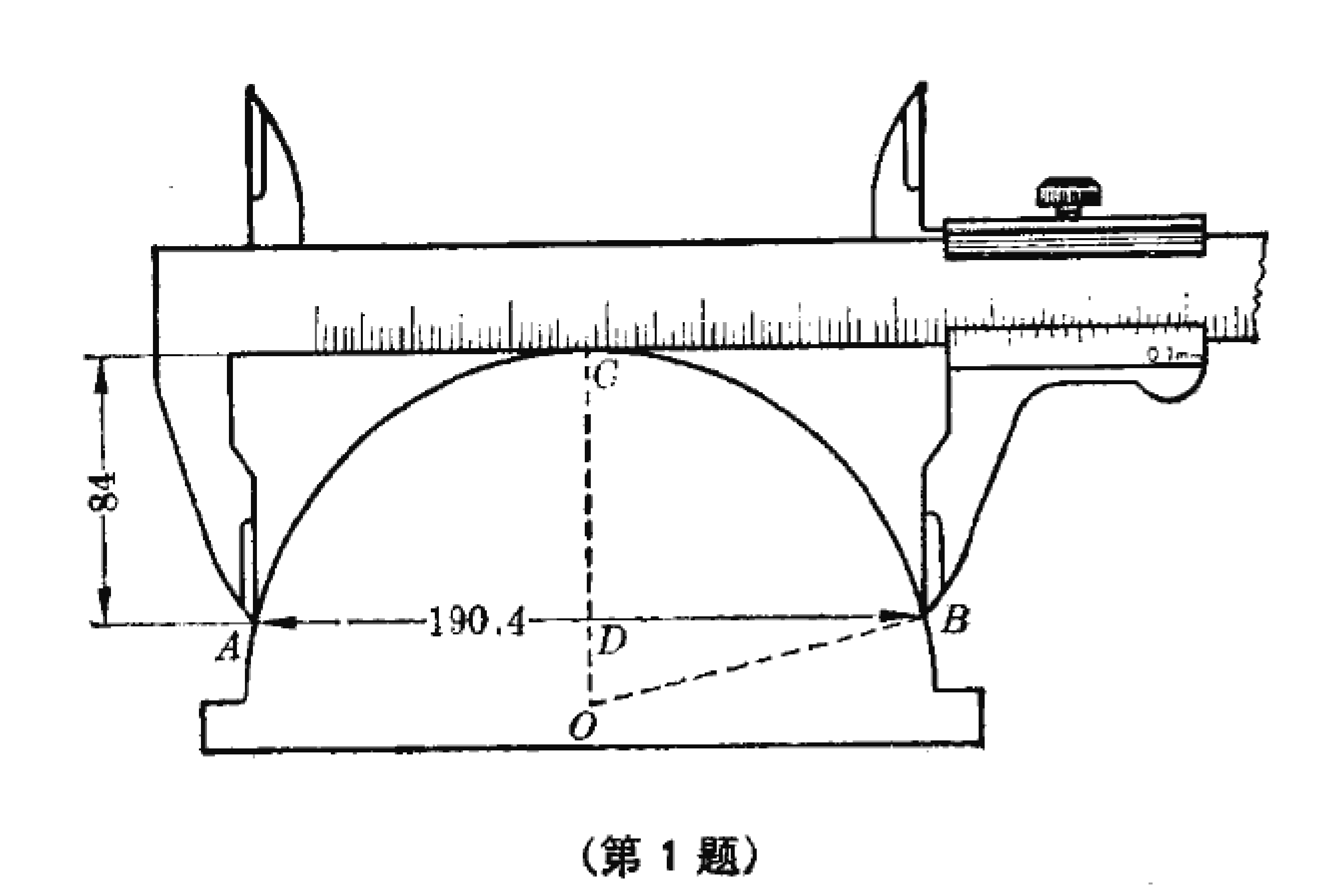
2. 圆周角和圆心角：

圆周角等于对同弧的圆心角的一半；

圆周角为直角时所对的弦是直径.

习　题

1. 测得圆形工件的弦 AB 长 190.4 毫米，卡脚高(矢高) CD 为 84 毫米，求工件的直径.



(第 1 题)

2. 把钢珠放在圆形工件的上面，可以测量工件的内直径．若钢珠在圆孔外面的高度 $h=8.4$ 毫米，钢珠的半径 $r=5$ 毫米，试计算工件内直径 d.

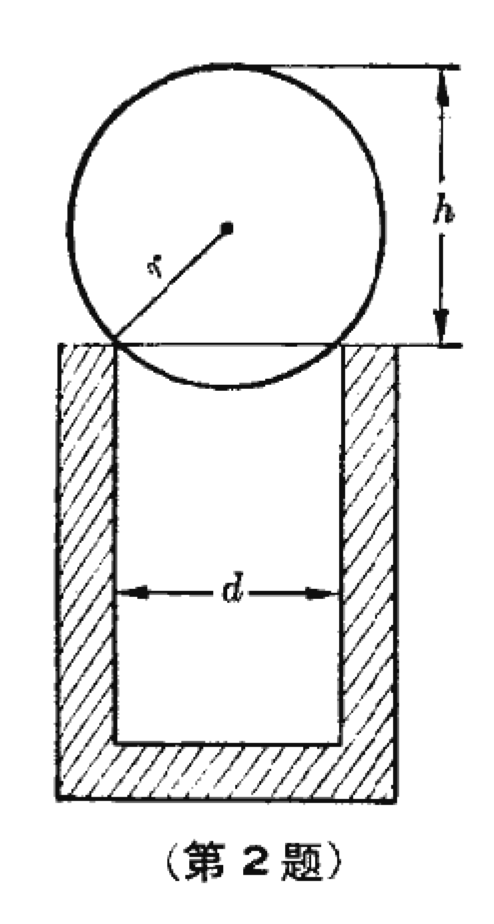
3. 圆内两弦 AB 与 CD 相交于 E 点，则 $AE\cdot EB=CE\cdot ED$.

4. 在直径为 40 毫米的轴上，铣出一个正方形的平面，正方形的一边长是 34.9 毫米，求铣切部分的深度 x.

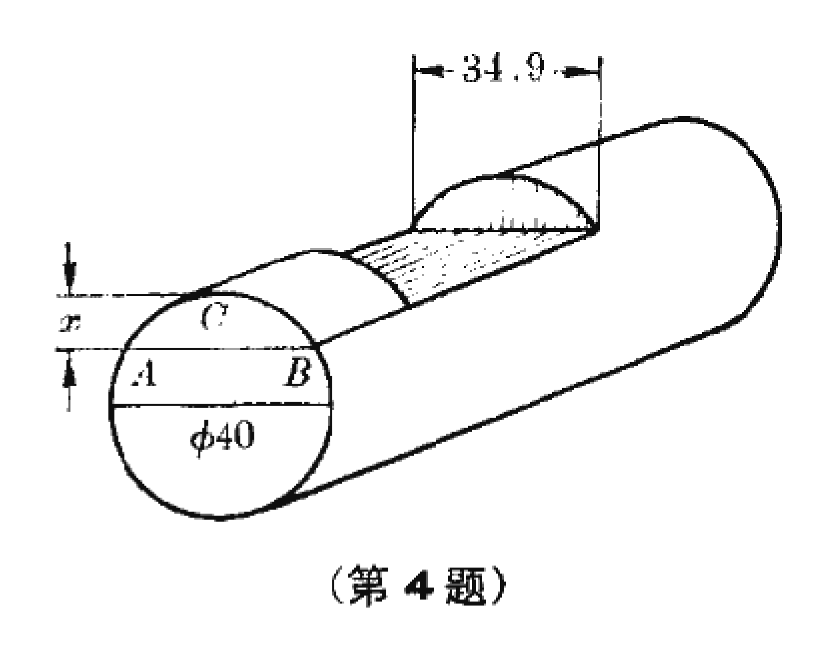
5. 试证圆内接四边形对角的和为 180°.

6. 直径 AB 与 CD 相交成 45° 角，计算下列角度：$\angle CAD$, $\angle CAB$, $\angle ADC$.

7. 圆的半径是 10 厘米，问圆的内接正三角形的边长是多少？面积是多少？



（第 2 题）



（第 4 题）

第二节　直线与圆弧、圆弧与圆弧的连接

这里我们再转入有关圆的另一课题，即线的连接问题．许多建筑工程的划线和机械零件的轮廓图，往往是由直线与圆弧或圆弧与圆弧连接构成的．在接头处要求由一种线条光滑地转到另一种线条上去．

例如，收割机的三星板图（图 4-14）就是由四条圆弧和两条线段连接构成的．要求按图中所给尺寸，把这个图样画出来．

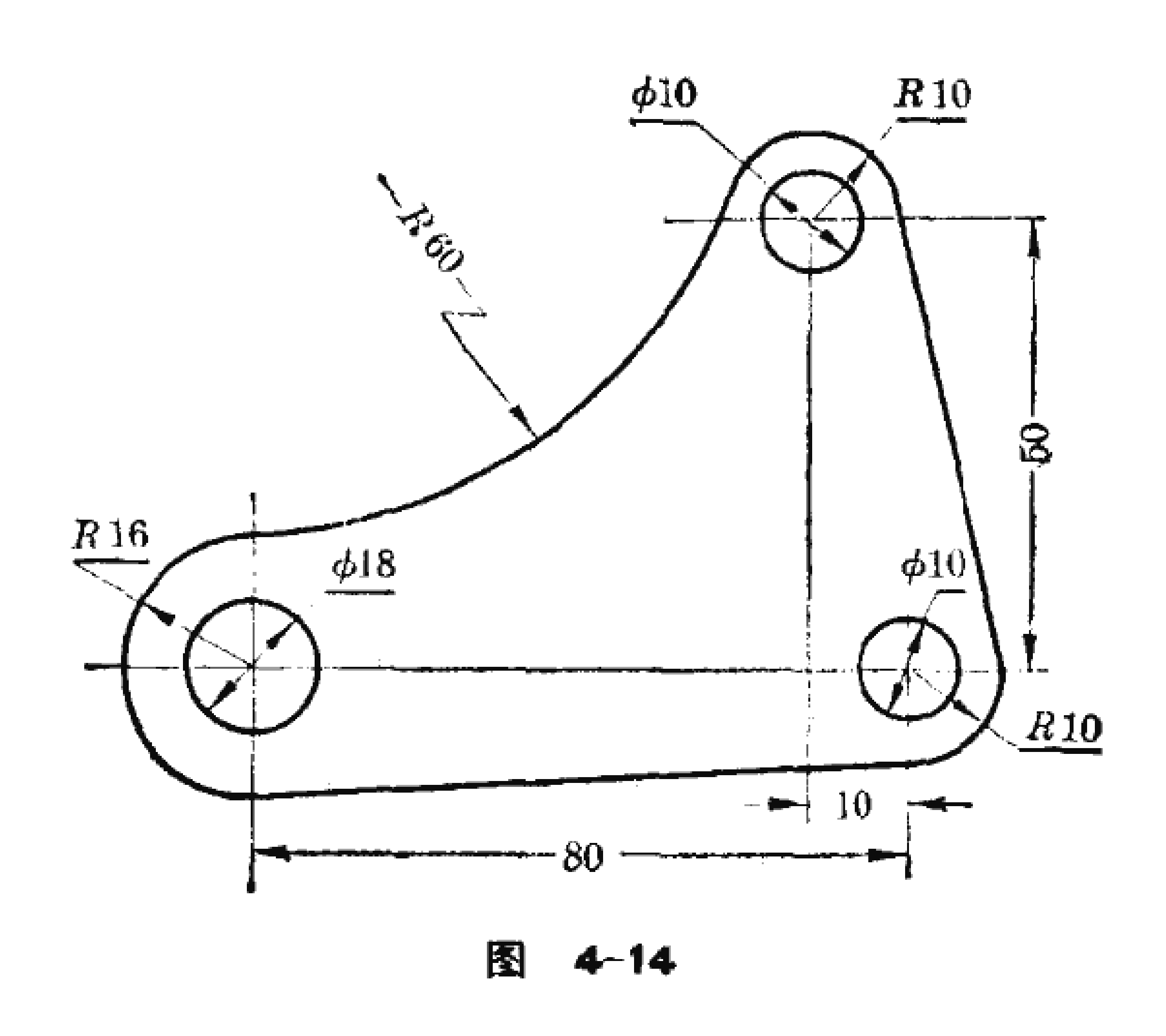


图 4-14

要能画好这种图样，就要懂得连接问题．要弄懂什么叫连接和怎样连接，那就要先弄清楚下面所讲的直线与圆相切和圆与圆相切的问题．

一、直线与圆相切　圆与圆相切

一条直线和圆如果有两个交点，这条直线就叫做圆的割线．如果直线和圆只有一个公共点，这条直线就叫做圆的切线，公共点叫做切点．

在图 4-15 中，A_1B_1 是一条割线，OT 是垂直于 A_1B_1 的半径．当 A_1B_1 逐渐离开圆心 O 经过 A_2B_2，A_3B_3，… 等位置平行移动时，它总是和 OT 相垂直而且被 OT 所平分的，这时割线与圆的两个交点也沿着圆周逐渐靠近，并且关于 OT 总是对称的．当 A_1B_1 到达半径 OT 的外端 T 即达到 AB 位置时，

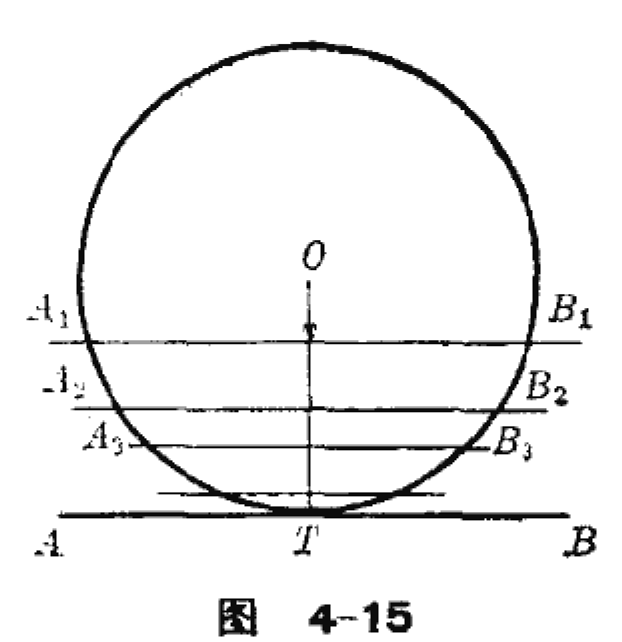


图 4-15

两个交点重合为一点，这时 AB 成为圆的切线，在这个位置上，显然，AB 也还是和 OT 相垂直的．由此可得

定理 圆的切线和过切点的半径相垂直．

直线和圆相切的例子是很多的．用游标卡尺量圆形工件的直径时．卡尺的两只脚都和圆相切；火车在轨道上，它的轮子和铁轨也是相切的．

上面的定理给我们指出了怎样过一点 P 向一个圆画切线的方法．

(1) 点 P 在圆 O 上(图 4-16)．

连 OP，过 P 作 $AB \perp OP$，那么 AB 就是所求的切线．

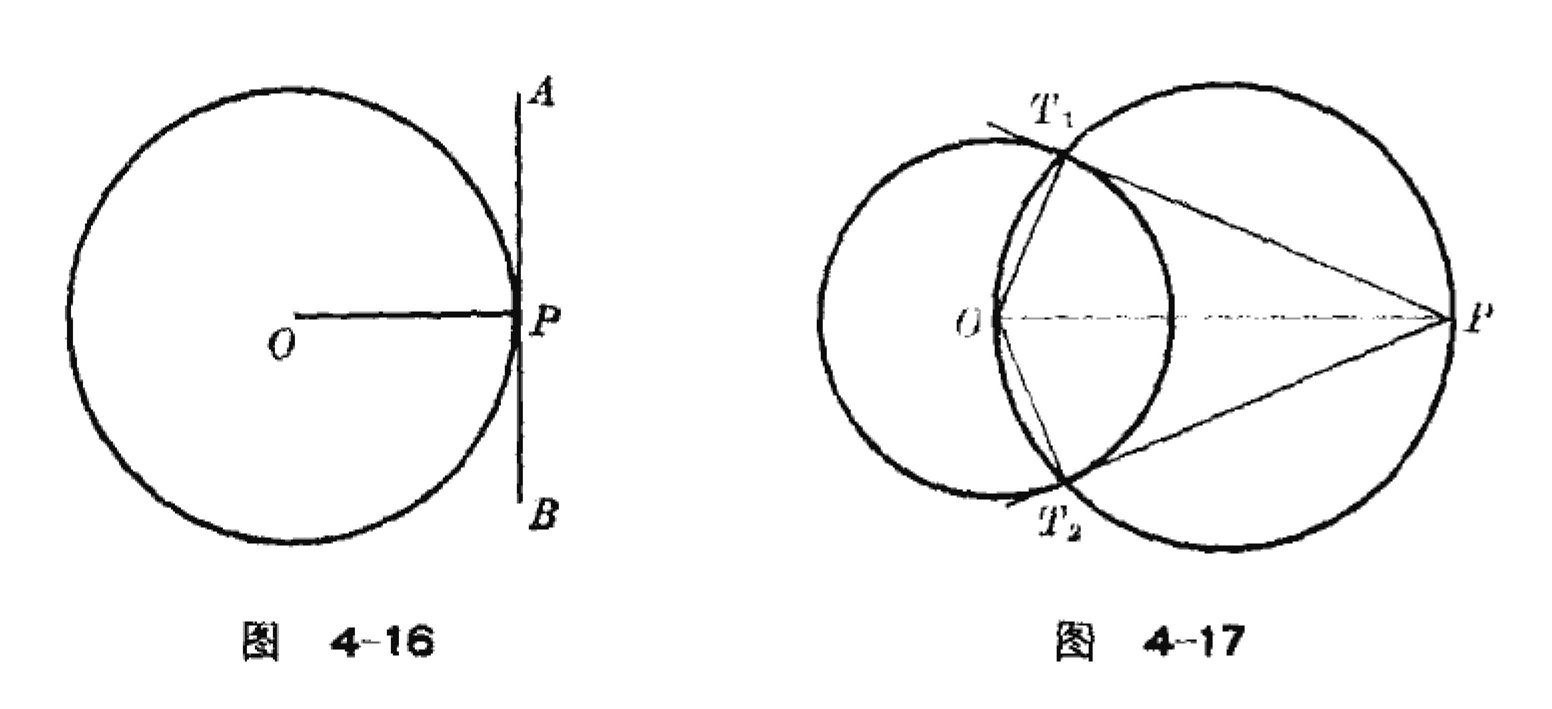


图 4-16　　　图 4-17

(2) 点 P 在圆 O 外(图 4-17)．

这里的关键在找切点的位置，只要能确定出切点，切线便容易画出．设 $T_1(T_2)$ 是切点，则因切线垂直于过切点的半径，所以 $\angle PT_1O=90°$．而对直径的圆周角是直角，由此可得画法如下：

连 OP，以 OP 为直径画圆交 $\odot O$ 于 T_1，T_2 两点，连 PT_1，PT_2 即为所求的切线．

从圆外一定点向圆所作的两条切线，其由定点到切点间线段的长叫切线的长．

[例 1]　试证从圆外一点向圆所作的两条切线的长相等.

已知：圆外一点 P 向圆作两切线 PA 和 PB(图 4-18)，A、B 是两切点.

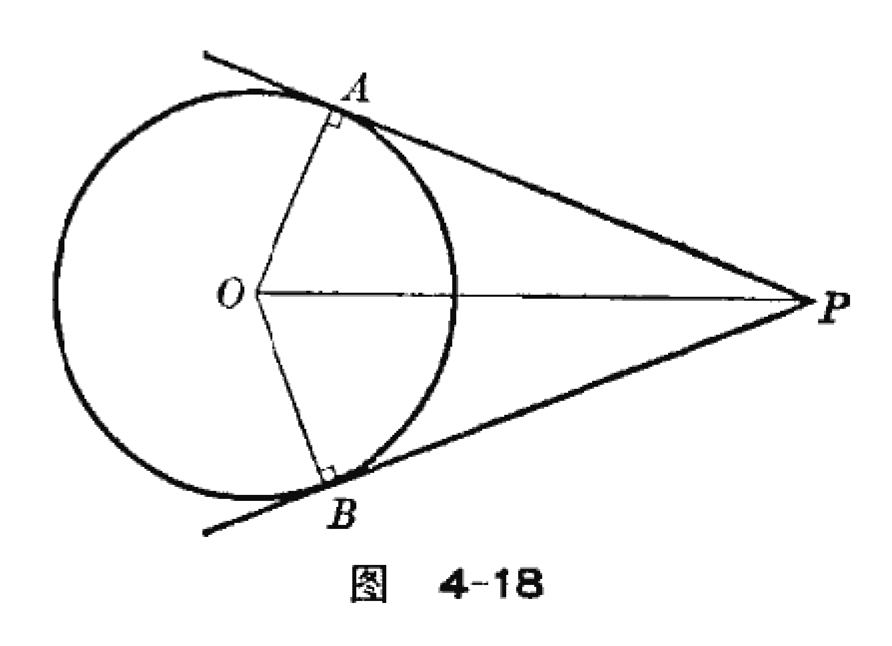


图　4-18

求证：$PA=PB$.

证明：连 OA, OB，则 $\angle PAO=\angle PBO=90^\circ$. 由勾股定理有

$$PA=\sqrt{OP^2-OA^2},\quad PB=\sqrt{OP^2-OB^2},$$

$$\because\quad OA=OB,$$

$$\therefore\quad PA=PB.$$

从上面这个例子还可证明 $\angle APO=\angle BPO$，所以，P 点和圆心 O 的连线平分从 P 点所作两切线的夹角.

反之，从圆外一点所作圆的两条切线，其夹角的平分线通过圆心.

工厂里用以找圆心的另一种工具叫"中心规"(图 4-19)，就是根据上面这条性质制造的. 中心规上钢尺的一边 AB 是两脚所夹角的平分线. 工人师傅常用中心规来找圆形工件的圆心. 他把中心规两脚卡紧圆形工件，然后沿尺边 AB 在工件上画一条直线，再把工件转动一下，又画出另一条直线，这两条直线的交点，就是圆心.

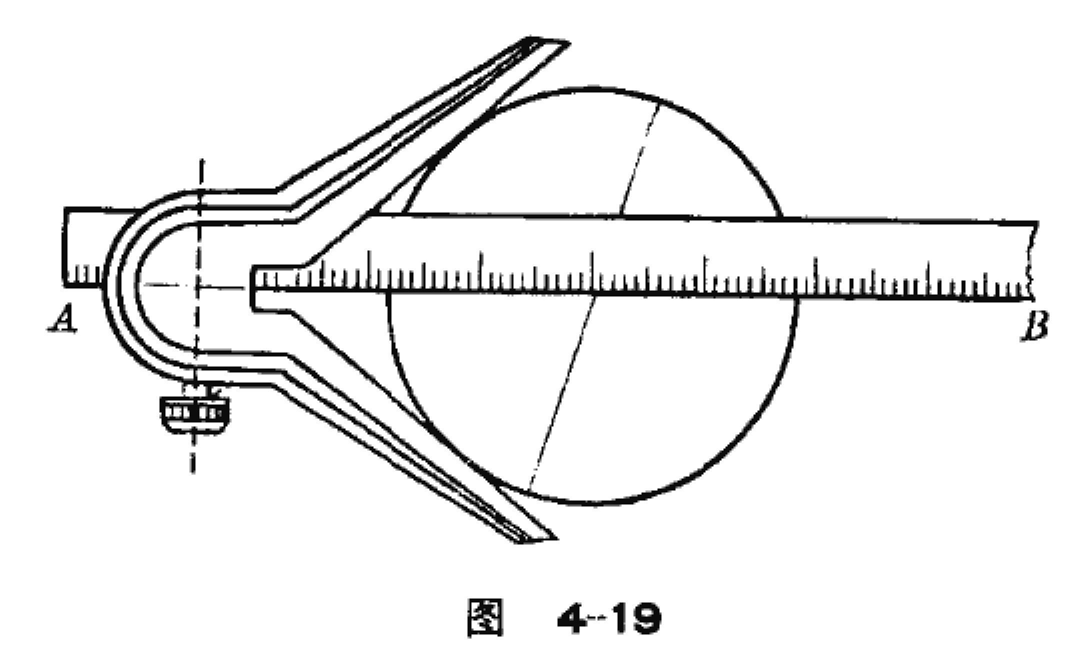


图　4-19

又如，工人老师傅响应毛主席"**勤俭建国**"的号召，尽量利

用边角材料，从剩下的三角形铁片中截割尽可能大的圆铁片.

从图 4-20 中可以看出，最大的圆铁片是和三角形三边都相切的圆片.

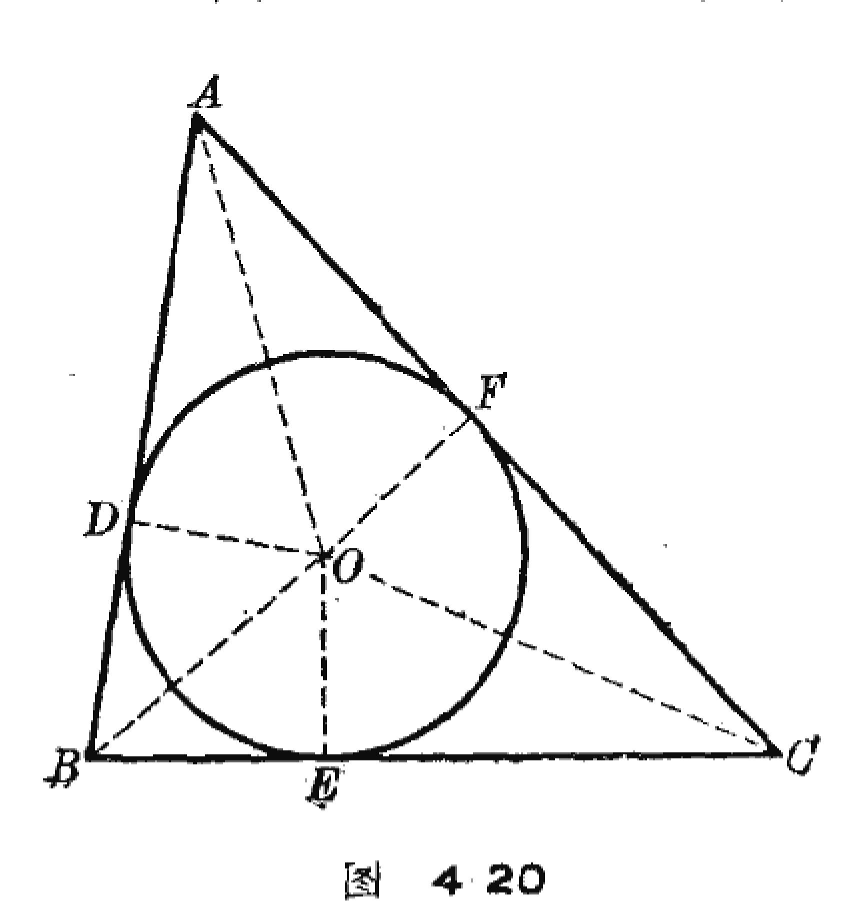


图 4-20

要截割这块圆片，先要定出圆片的中心. 工人师傅也是根据上面这条性质，画出 $\angle B$, $\angle C$ 的平分线，它们的交点 O 便是圆片的中心.

因为角平分线上任一点到角的两边等距离，交点 O 在 $\angle B$ 的平分线上又在 $\angle C$ 的平分线上，故有

$$OD=OE=OF,$$

既然 $OD=OF$，所以 O 点也在 $\angle A$ 的平分线上，因此，以 O 为圆心，OD 为半径画圆，便和 $\triangle ABC$ 的三边都相切了.

象这样一个和三角形各边都相切的圆叫做三角形的内切圆，内切圆的圆心叫三角形的内心，这三角形叫圆的外切三角形.

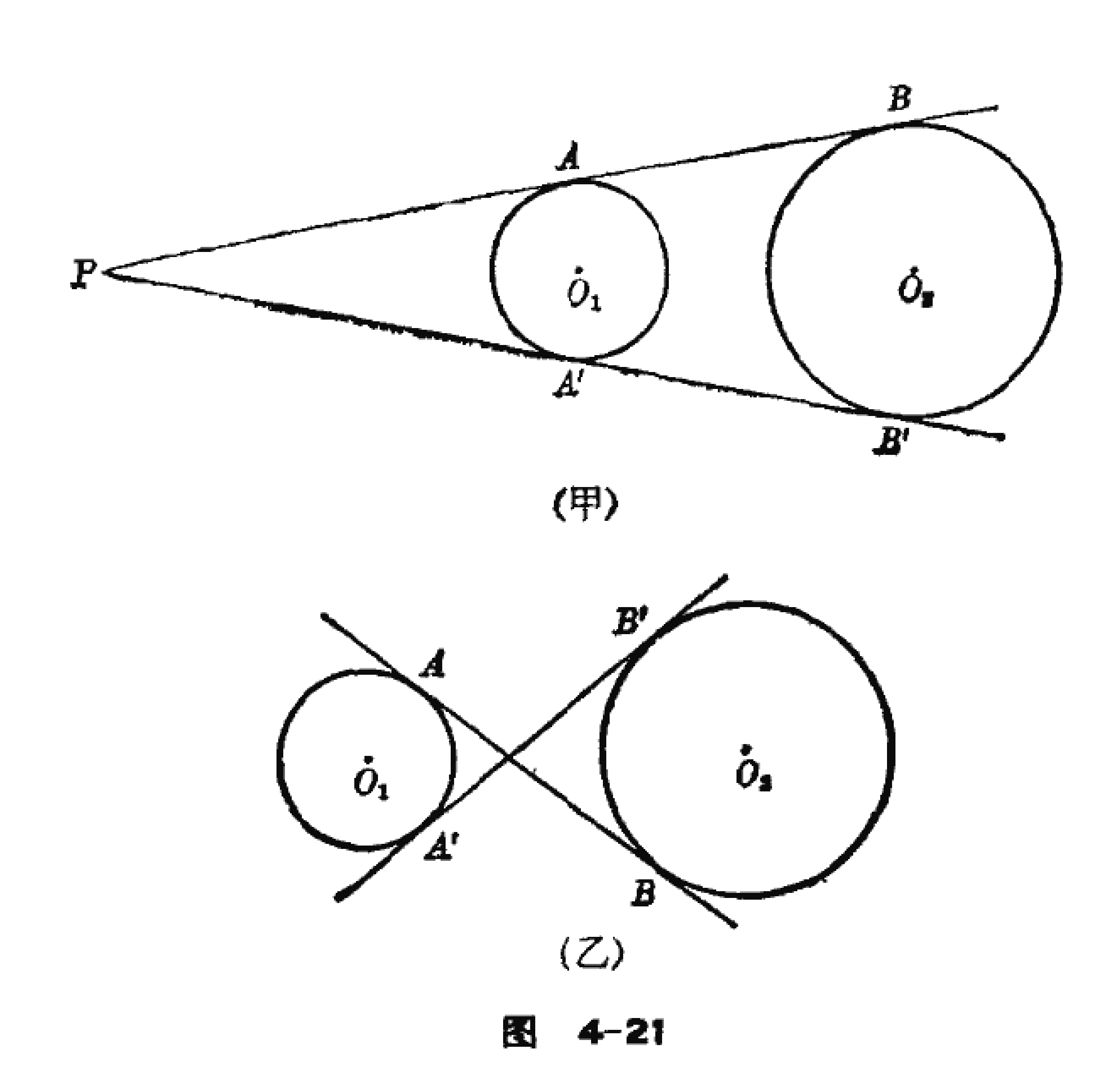
从上面画法中可知：三角形三个内角的平分线相交于一点，这一点即三角形的内心.

上面讲的是一条直线和一个圆相切的情况. 另外，我们在实际中还看到有一条直线同时和两个圆都相切的例子. 例如皮带轮的传动带和两个轮子都相切；自行车的链条和轮盘、飞轮也都相切.

一条直线和两个圆都相切，这条直线叫做两个圆的公切线. 当两圆在公切线的同旁时，这条公切线叫外公切线，如图 4-21 (甲)；当两圆在公切线的两旁时，这条公切线叫内公切

线，如图 4-21(乙).

一条公切线上两个切点间的距离叫做公切线的长，如图 4-21 中的 AB 和 $A'B'$.



(甲)

(乙)

图 4-21

[例 2] 证明两个圆的两条外公切线的长相等.

已知：图 4-21(甲)中，AB, $A'B'$ 是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的外公切线的长.

求证：$AB=A'B'$.

证明：设两条外公切线相交于 P，则有

$$PA=PA', \qquad PB=PB',$$

$$\therefore \quad PB-PA=PB'-PA',$$

即

$$AB=A'B'.$$

两圆的两条内公切线的长也是相等的，由读者自己证明.

过两圆圆心 O_1, O_2 的直线叫连心线．无论两圆处在什么样的相互位置，相交或不相交，连心线都是两圆的对称轴．因为如果以连心线做轴，把圆对折，那么每一个半圆上的点，必定和另一半圆上的点重合．

从图 4-22 可见，两圆相交，有两个交点，这两交点关于连心线是对称的．当两圆沿连心线渐渐离开时，两个交点就渐渐靠近，但两交点关于连心线还是对称的．两圆继续离开，当两交点在圆周上重合为一点时，该点就落在连心线上，即连心线通过这点．

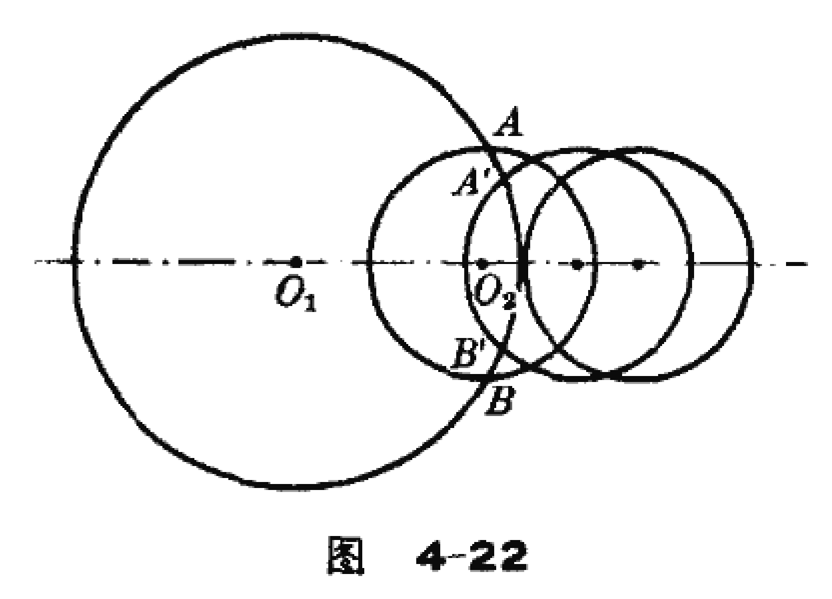


图 4-22

两圆只有一个公共点时，叫做两圆相切，公共点叫切点．如图 4-23(甲)的情况叫两圆外切；如图 4-23(乙)的情况叫两圆内切．

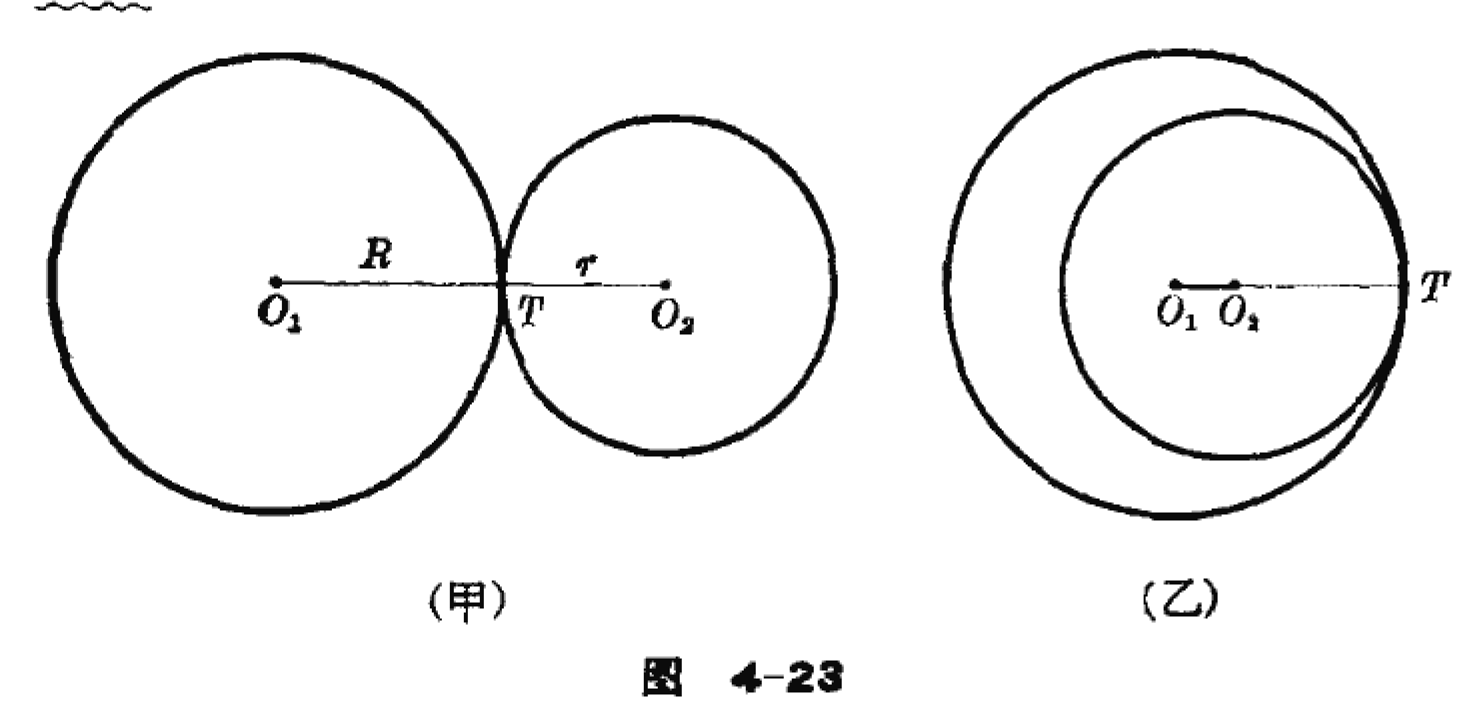


图 4-23

两圆无论是内切或外切，都有如下一个共同性质：

定理 两圆相切，连心线通过切点．

相切两圆的实例也是很多的，比如齿轮传动机构上的两个齿轮，它们的节圆就是相切的；又如滚珠轴承的滚珠和轴承

套之间有内切，也有外切.

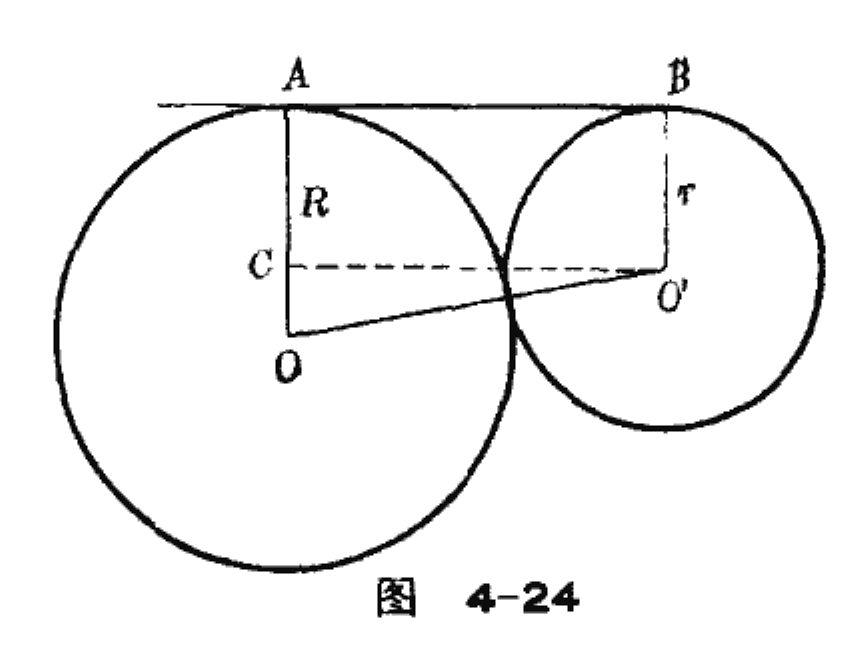


图 4-24

[例 3] 在图4-24中，两个半径分别为 $R=23$ 毫米，$r=14$ 毫米的圆相外切，直线 AB 切两圆于 A 及 B 点，求 AB 的长.

解：因两圆相切，故连心线 OO' 通过切点. 又因 AB 与两圆都相切，故 $OA\perp AB$ 及 $O'B\perp AB$.

从 O' 作 $O'C\perp OA$，则 $AB=CO'$，而

$$CO'=\sqrt{OO'^2-OC^2}=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr}.$$

把已知值代入，得到

$$AB=CO'=2\sqrt{23\times14}\approx36.$$

即 AB 的长约为 36 毫米.

[例 4] 三个圆两两外切(图 4-25)，它们的圆心距是 7 厘米，8 厘米和 11 厘米，求这三个圆的半径.

解：设 $\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$ 的半径分别为 x、y、z.

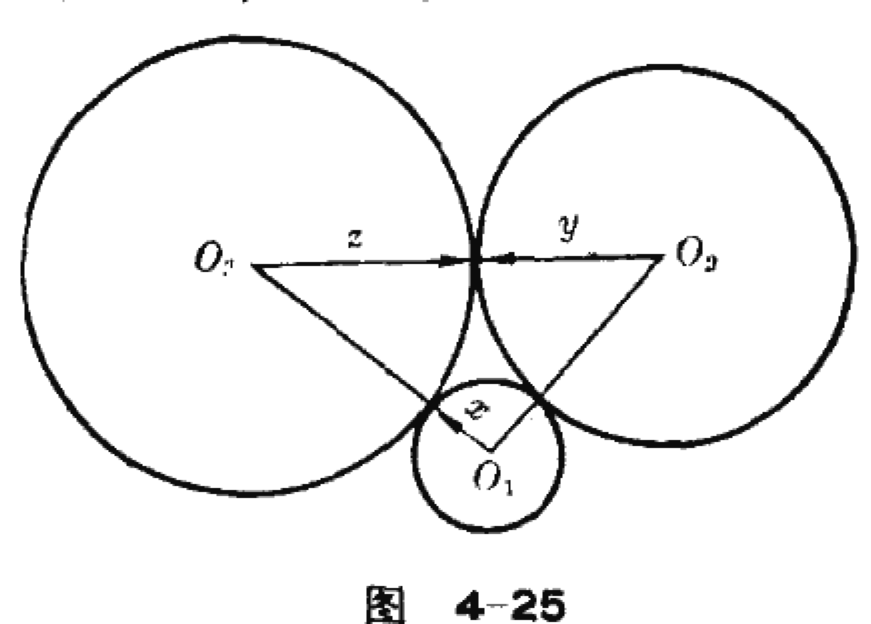


图 4-25

因为连心线通过切点，于是有

$$x+y=7,$$
$$x+z=8,$$
$$y+z=11,$$

$$\therefore\quad x+y+z=\frac{1}{2}(7+8+11)=13,$$

于是

$$x=2,\quad y=5,\quad z=6.$$

即三个圆的半径分别为 2 厘米、5 厘米和 6 厘米.

二、直线与圆弧的连接

在本节开头，我们曾提到线的连接问题．所谓线的连接，是指由一种线条光滑地转到另一种线条上去．当直线与圆相切时，直线在切点处就是光滑地过渡到圆弧上去的．在这种情况下，我们说直线与圆弧在切点处连接，如图 4-26.

工厂里的防护罩的外缘轮廓线，体育场的跑道，都是直线和圆弧在切点处连接的．

下面介绍几种直线与圆弧连接的画法．

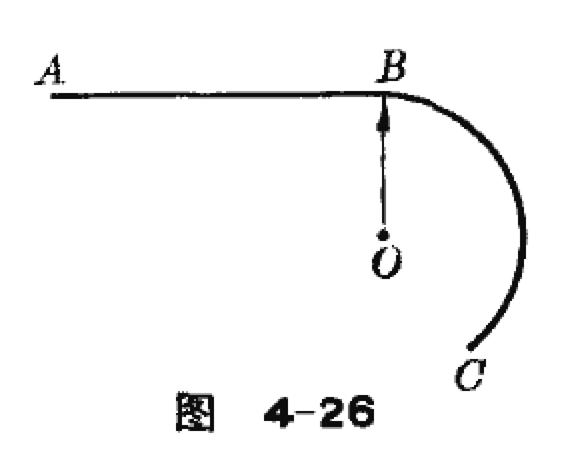


图 4-26

[例 5] 画一半径为 R 的圆弧，连接已知线段于线段上的一个已知点．

已知：定长 R，定线段 AB，定点 B.

求作：半径为 R 的圆弧，在 B 点处和 AB 连接．

作法：在 B 点作 AB 的垂线，并在垂线上截取 $BO=R$，然后以 O 为圆心，OB 为半径作弧 $\overset{\frown}{BC}$，便是所求作的圆弧，如图 4-27.

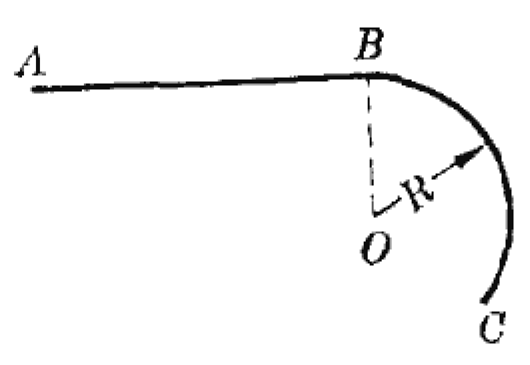


图 4-27

本题的证明由读者自已完成．

[例 6] 画一半径为 R 的圆弧与两已知相交直线连接．

已知：定长 R，两相交直线 l_1, l_2.

求作：半径为 R 的圆弧，使它和 l_1, l_2 相连接．

分析：因为所求圆弧半径 R 是已知的，所以只要找出此弧的圆心位置，问题就解决了．假设这段弧 AB 已画出(图 4-28)，它和 l_1, l_2 两直线的切点分别为 A, B. 那末从 A, B

分别作两直线的垂线相交于O，则点O便是求作圆弧的圆心，这里我们看到$OA=OB=R$，由此得到作法如下：

作法：如图4-28，作$l_1' \parallel l_1$，$l_2' \parallel l_2$，使l_1'到l_1的距离和l_2'到l_2的距离都为R，再以l_1'，l_2'的交点O为中心，R为半径画$\overset{\frown}{AB}$，即为所求的圆弧．

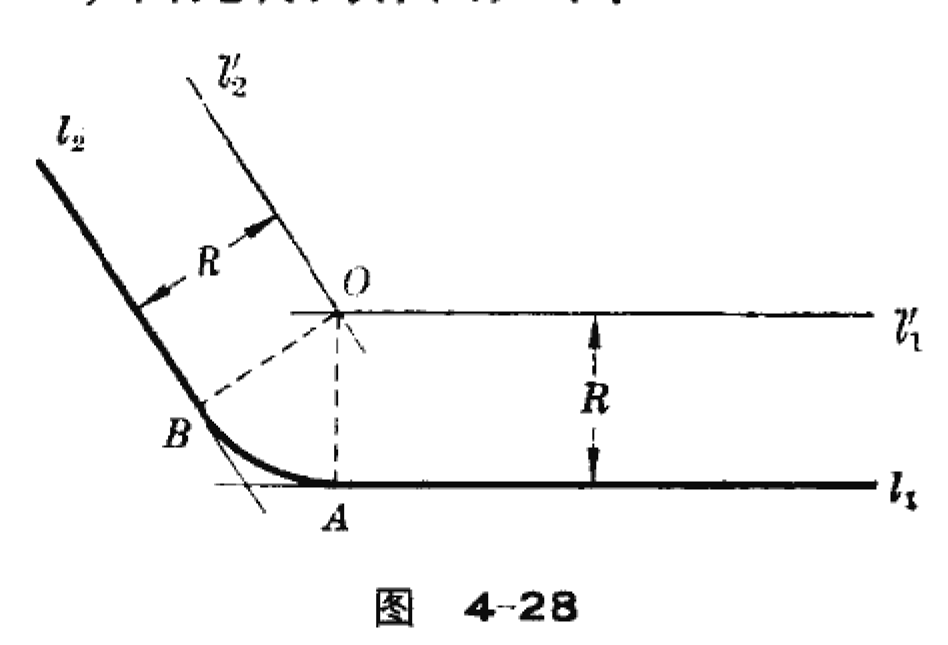


图 4-28

本题的证明由读者自己完成．

［例7］ 画一条直线和两个圆弧相连接（这也就是画两个圆的公切线）．

已知：$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{CD}$．

求作：直线a，使它在$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CD}$的同旁，并和这两弧连接（即作两圆的外公切线）．

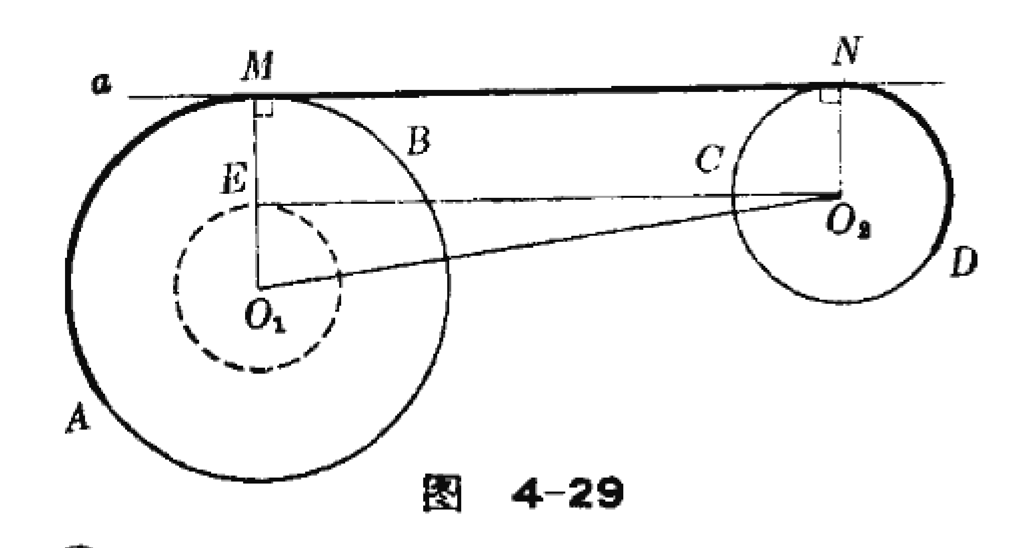


图 4-29

分析：关键问题要确定切点的位置．

假设公切线a已作出，它分别切两弧于M和N，令$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{CD}$所在圆的圆心分别为O_1，O_2，半径分别为R_1，R_2，则$O_1M \perp a$，$O_2N \perp a$．要确定切点M的位置，只要确定O_1M的位置，因为它和$\odot O_1$的交点便是M．为了确定O_1M，需要再确定这条线上的另一点．试从O_2向O_1M作垂线O_2E，那么O_2E和公切线a平行，这里

$$O_1E=O_1M-EM=O_1M-O_2N=R_1-R_2$$

为定长，如果以O_1为心，R_1-R_2为半径画一个辅助圆，则

O_2E 是这个辅助圆的切线，E 是切点，于是 O_1E 便可画出(图 4-29).

作法：画出 $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ 所在圆的圆心 O_1, O_2.

以 O_1 为心，R_1-R_2 为半径画辅助圆.

从 O_2 向辅助圆画切线，得切点 E.

连 O_1E，并延长交 $\widehat{AB}$ 于 M.

作 $O_2N \parallel O_1M$ 交 $\widehat{CD}$ 于 N.

过 M、N 作直线，便得所求的公切线 a，它和两已知弧在 M、N 与 $\widehat{AM}$, $\widehat{ND}$ 相连接.

本题的证明由读者自己作.

同样，读者也可以根据图 4-30 所示，画出直线 a，使它在 $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ 的两旁，并和这两弧连接(即作两圆的内公切线).

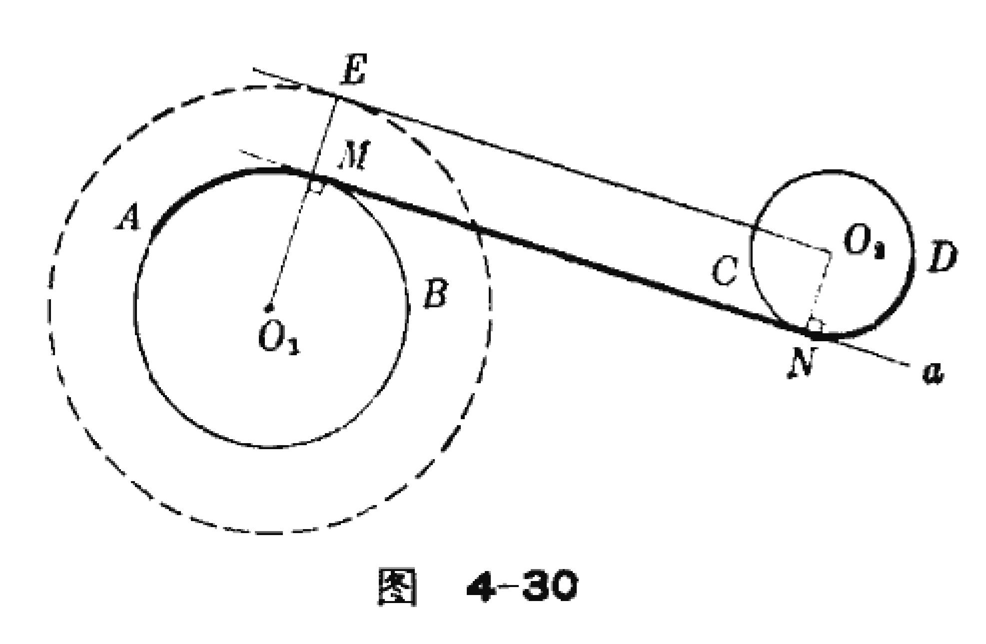


图 4-30

[例 8] 图 4-31(甲)是一块挂板，试按给定尺寸画出它的平面图.

分析：这种图形的外缘轮廓线，是由三条弧 $\widehat{AB}$、$\widehat{CD}$、$\widehat{EF}$ 与三条线段 AF、BC 和 ED 连接而成的，见图 4-31(乙). 三条弧的半径 10、3、3 毫米是已知的，当 O 点的位置确定后，$\widehat{AB}$ 就可以画出，再确定 P 点、Q 点，从 P、Q 向 $\widehat{AB}$ 作切线，然后画 $\widehat{FE}$、$\widehat{CD}$ 使与相交直线 AP、PQ 与 BQ、PQ 相连接，图形便作成.

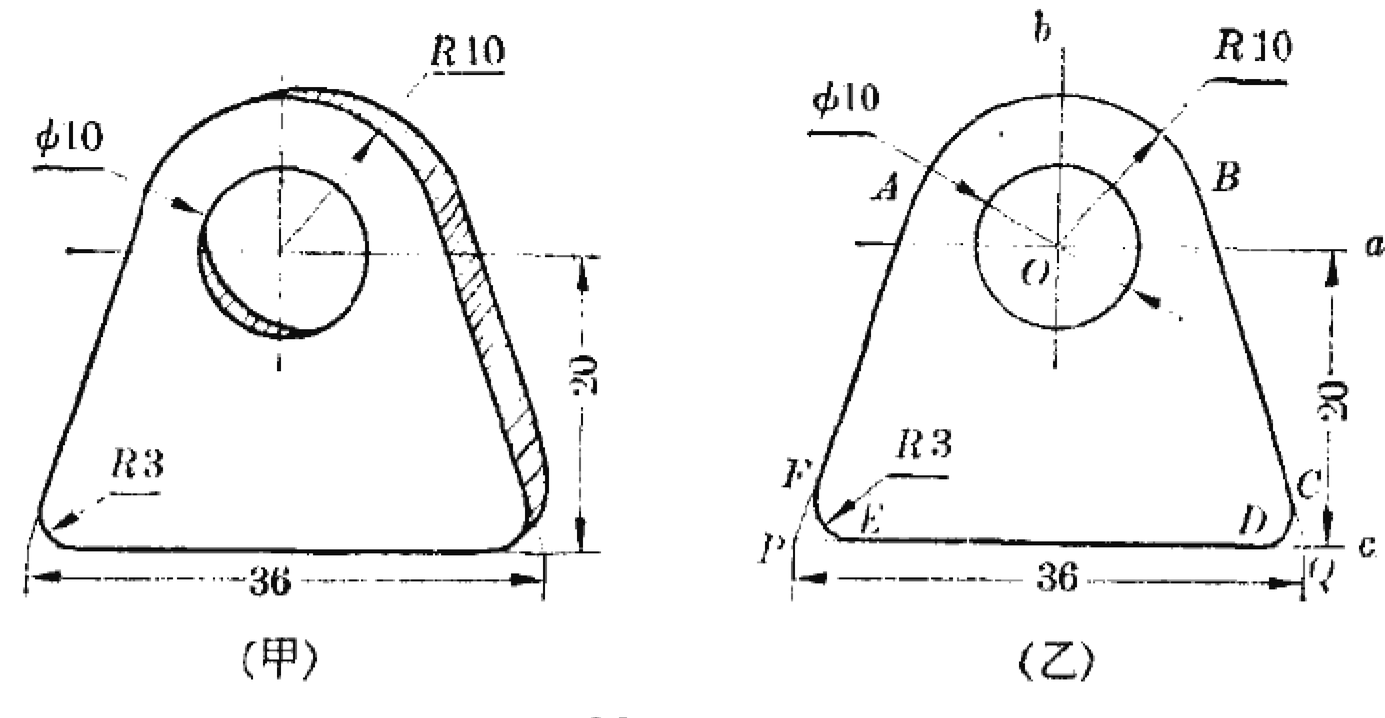


图 4-31

作法：先划十字线 a、b，交点为 O.

作 $c \parallel a$，使 a、c 间距离为 20 毫米，于 c 线上取 P、Q 两点，分别在 b 线两侧，且到 b 线距离都为 18 毫米.

以 O 为心，画半径 $R=10$ 毫米的 $\overset{\frown}{AB}$.

从点 P 和 Q 分别作 $\overset{\frown}{AB}$ 的切线 PA，QB.

作半径为 3 毫米的 $\overset{\frown}{CD}$ 与两条相交直线 QB、QP 连接，并作半径为 3 毫米的 $\overset{\frown}{FE}$ 与 PA、PQ 连接.

以 5 毫米为半径作 $\odot O$ 完成作图.

三、圆弧与圆弧的连接

当两圆相切时，圆弧与圆弧就在切点处光滑地连接起来，从一个圆弧光滑地过渡到另一个圆弧，这就是圆弧与圆弧的连接．如图 4-32(甲)叫外连接，是两弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{BC}$ 所在圆外切时的情形；图 4-32(乙)叫内连接，是两弧所在圆内切时的情形.

前面讲过，两圆相切，它们的连心线通过切点，现在两圆弧于切点处相连接，可知连心线 O_1O_2 必然通过切点 B，并且在外连接的情况下，有

$$O_1O_2=R_1+R_2,$$

在内连接的情况下，有

$$O_1O_2=R_1-R_2.$$

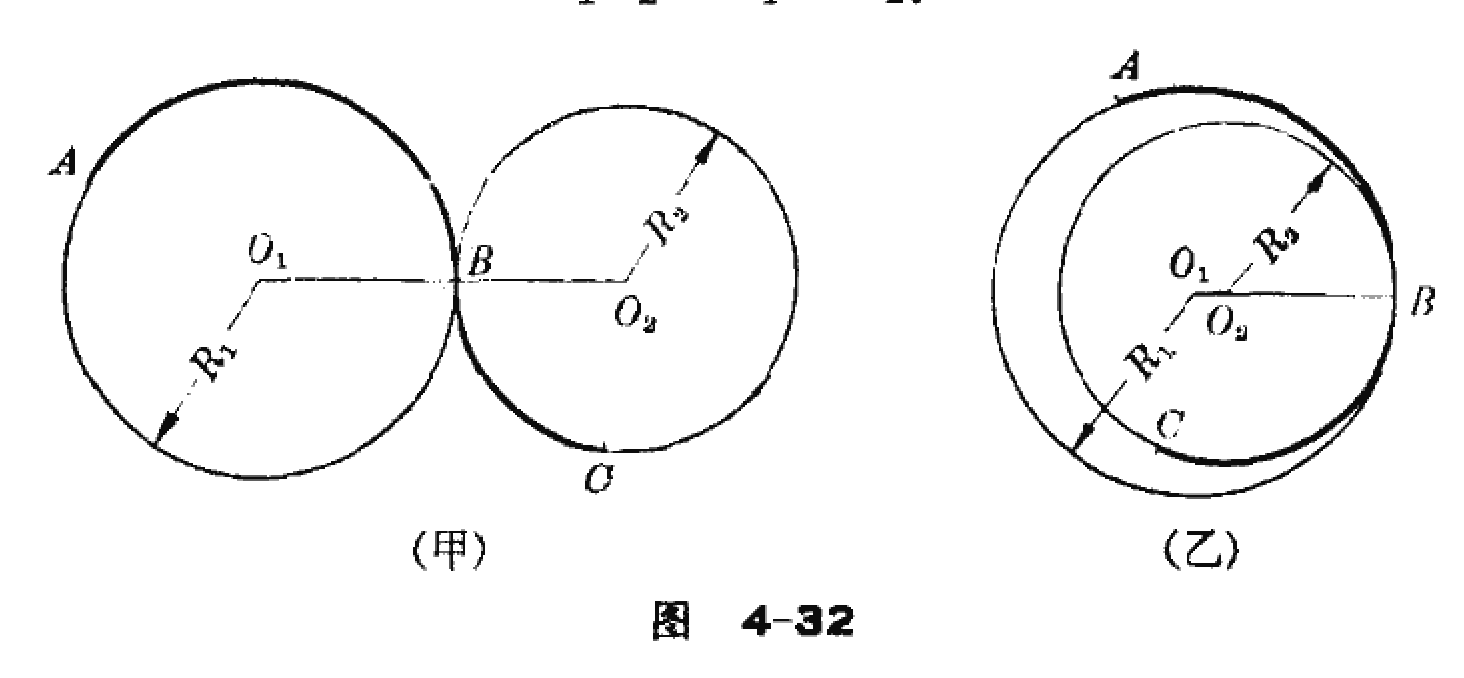


图 4-32

下面举一个例子说明圆弧与圆弧连接的画法.

[例 9] 画一半径为 R 的圆弧，和一已知圆弧外连接，并和另一已知圆弧内连接.

已知：两圆弧 l_1, l_2 的半径分别为 R_1, R_2，两圆弧所在圆的圆心分别为 O_1, O_2; 定长 R.

求作：画一个以 R 为半径的圆弧，使它和 l_1 内连接，和 l_2 外连接(图 4-33).

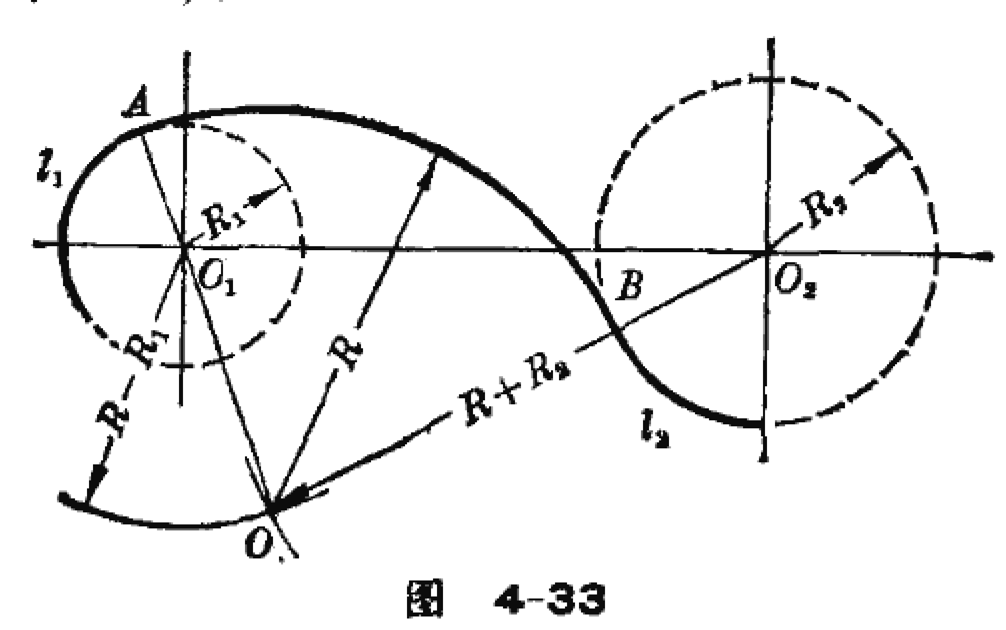


图 4-33

分析：解决这问题的关键是确定所求弧的圆心 O 的位置. 因为所求的圆弧要和 l_1 内连接，所以 $OO_1=R-R_1$，即圆心 O 应在以 O_1 为心，$R-R_1$ 为半径的圆上. 又因为所求弧要

和 l_2 外连接，所以 $OO_2=R+R_2$，即圆心 O 又应在以 O_2 为心，$R+R_2$ 为半径的圆上．于是这两个圆的交点便是 O 点的位置．

作法：先画出圆弧 l_1，l_2 所在圆的圆心 O_1, O_2．

分别以 O_1 为心、$R-R_1$ 为半径，O_2 为心、$R+R_2$ 为半径画弧，两弧相交于 O．

以 O 为心、R 为半径画 $\overset{\frown}{AB}$ 与两已知弧连接，$\overset{\frown}{AB}$ 便是所求作的弧．

小　　结

1．直线和圆相切：

圆的切线和过切点的半径相垂直．

从圆外一点 P 向圆 O 可作两切线，这两条切线的长相等，并且 PO 平分两切线的夹角．

反之，从圆外一点所作圆的两条切线，它们夹角的平分线通过圆心．

三角形三个内角的平分线相交于一点（内心）．

2．圆和圆相切：

两圆相切，连心线通过切点．

设两圆的半径分别为 R，r，连心线长为 d，则当两圆外切时，$d=R+r$；内切时，$d=R-r$．

习　　题

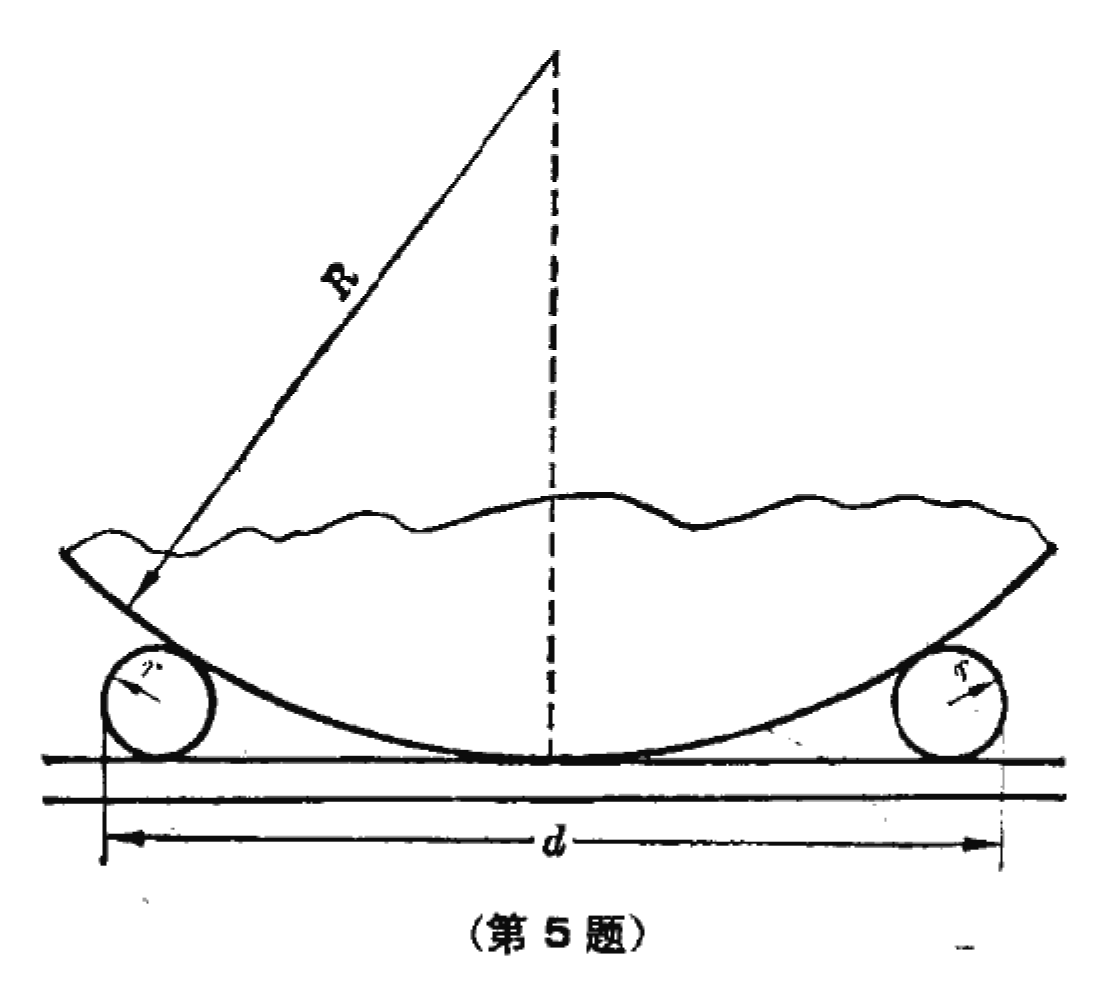
1．设三角形的三边长分别为 3，4，5 厘米，求各顶点到内切圆的切点的距离．

2．圆的半径为 R，求它的外切正三角形的每边长和面积．

3．从圆外一点 P 向圆作割线交圆于 A，B 两点，并过 P 作圆的切线 PT，试证明 $PA\cdot PB=PT^2$．

4. 各边都和圆相切的四边形叫圆的外切四边形，试证明圆外切四边形对边的和相等.

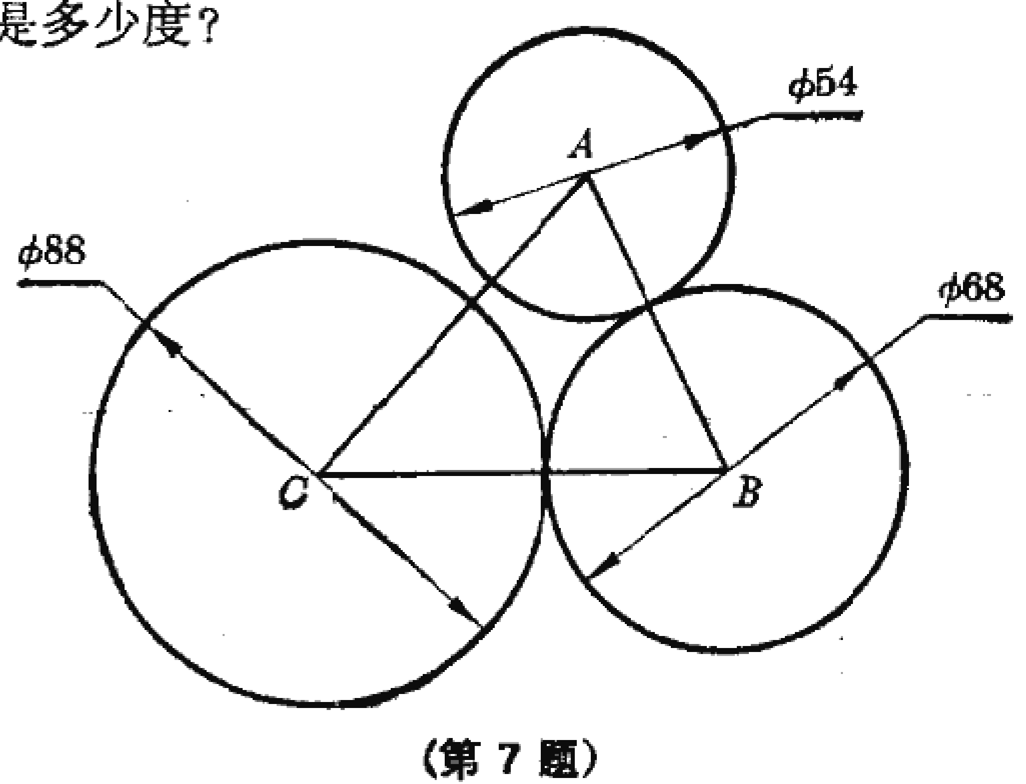
5. 要测量一个大型圆柱工件的直径，用两个半径 $r=10$ 厘米的小圆钢柱，对称地安放在大圆柱工件的两侧，如图所示. 测得两个小圆钢柱外端间距离 $d=164.22$ 厘米，试计算大型圆柱直径.



（第 5 题）

6. 联接相交两圆交点的线段叫公共弦. 试证两圆的连心线垂直平分公共弦.

7. 三个传动齿轮如图，已知齿轮节圆的直径分别为 54，68 和 88 毫米，齿轮 A 和齿轮 C 的中心距为 85 毫米，问齿轮中心连线的三个夹角各是多少度？

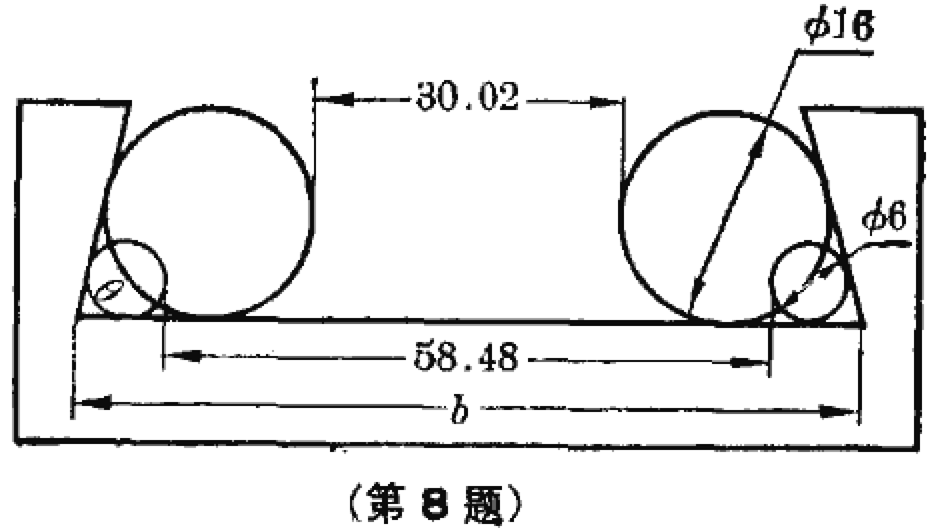


（第 7 题）

8. 用 $\phi16$ 毫米的圆柱棒测量燕尾槽，如图，测量值是 30.02 毫米，用 $\phi6$ 毫米的圆柱棒测量时，测量值是 58.48 毫米，试求

(1) 燕尾槽的底角 θ;

(2) 燕尾槽的底宽 b.

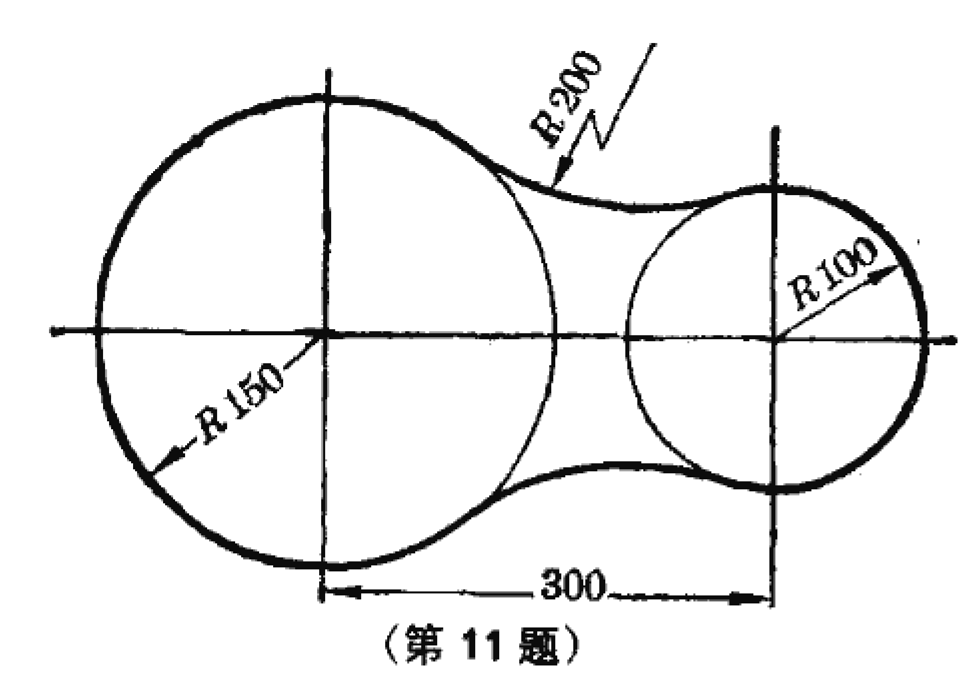


(第 8 题)

9. 两圆相切于 P，过 P 点任意作两直线与两圆的交点分别为 A，C 与 B，D，求证 $AB \parallel CD$.

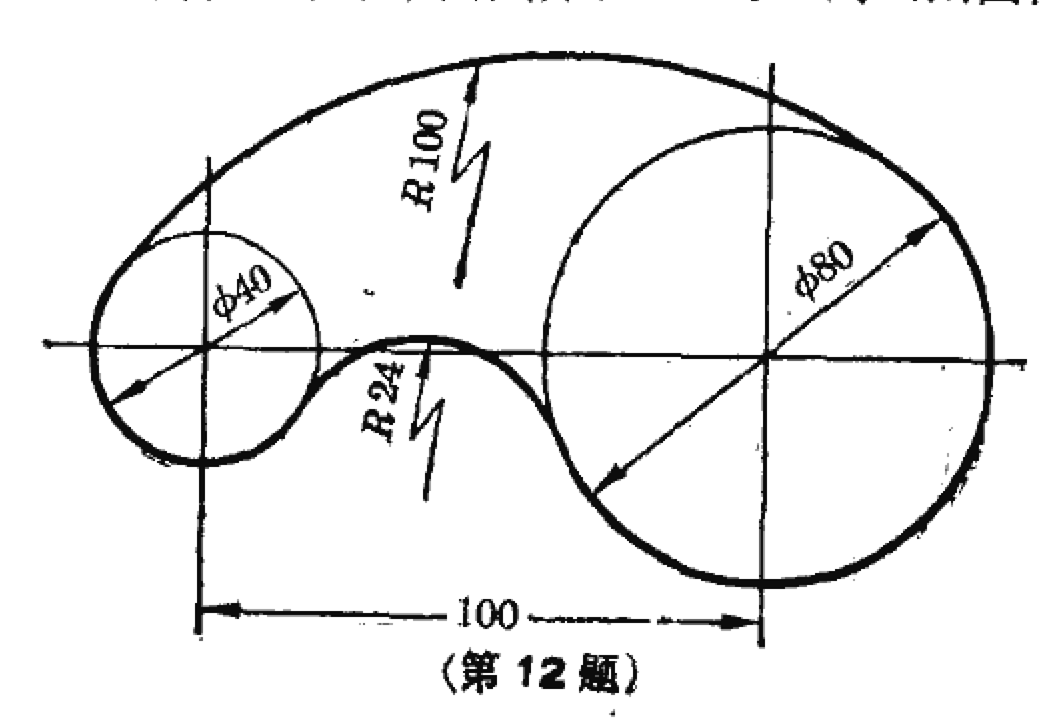
10. 在 $\odot O$ 中，AB 和 CD 是两条相等的弦，以 O 为圆心画一个圆和 AB 相切，证明它和 CD 也相切.

11. 按 1:1 的比例画出控制汽门开关拐臂的平面图.



(第 11 题)

12. 下图是电炉零件的部分平面图，用 1:2 的比例画出图样.



(第 12 题)

第三节　弧长和弧度制

一、圆周长　弧长

我们知道，不论圆的直径多大，圆周长 C 和直径 D 的比值 $\frac{C}{D}$ 总是一个定数，称它为圆周率，用字母 π 表示，即

$$\frac{C}{D}=\pi \quad 或 \quad C=\pi D,$$

圆的半径记为 R，这个公式也可写成

$$C=2\pi R.$$

这就是圆周长的公式.

早在公元三世纪，我国刘徽利用圆内接正多边形边长代替圆周长的办法，已算得 π 的数值为 $\pi=3.1416$. 到公元五世纪，我国数学家祖冲之进一步算出 π 的数值介于 3.1415926 和 3.1415927 之间，且定出 π 的约率为 $\frac{22}{7}$，密率为 $\frac{355}{113}$，这是我国古代数学的光辉成就之一.

［例 1］　求边长为 4 厘米的正方形的外接圆的周长.

解：在图 4-34 中，正方形 $ABCD$ 的边长为 4 厘米，$\odot O$ 是它的外接圆. 连对角线 BD. 由于 $\angle A=90°$，所以 BD 是 $\odot O$ 的一条直径.

$$\because \ BD=\sqrt{4^2+4^2}$$
$$=4\sqrt{2}\text{（由勾股定理）},$$
$$\therefore \ 圆周长 \ C=\pi\times 4\sqrt{2}$$
$$\approx 17.77.$$

即 外接圆的圆周长约为 17.77 厘米.

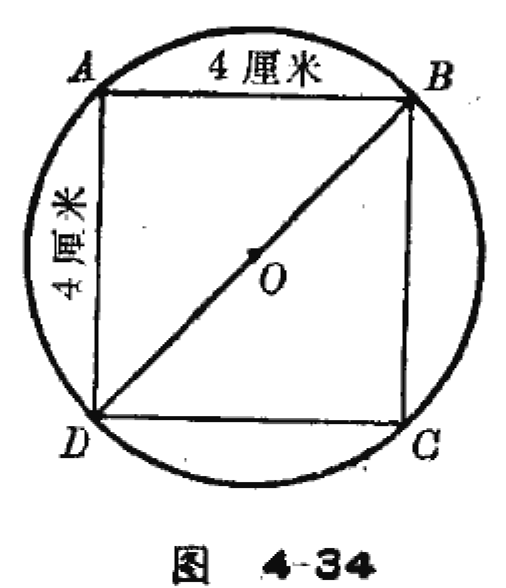


图 4-34

[例 2]　机车以每小时 65 公里速度前进，已知机车车轮的转速是 250 转/分，求车轮的直径(毫米).

解：机车车轮每小时转 250×60 圈，机车前进 65 公里，即 65×10^6 毫米. 所以，机车车轮每转一圈，机车前进 $\frac{65\times10^6}{250\times60}$ 毫米，即机车车轮的周长为 $\frac{65\times10^6}{250\times60}$ 毫米.

因此，机车车轮直径

$$D=\frac{C}{\pi}=\frac{65\times10^6}{250\times60\times3.1416}\approx1379\ (\text{毫米}).$$

在生产实际中，不但要计算圆的周长，有时还要计算一段弧的弧长. 例如，在计算传动装置中皮带轮皮带的长时，就要计算皮带绕在轮子上的那一段的长，这就需要计算那一段的弧长.

我们知道，在任一圆中，圆心角愈大，所对的弧也愈长. 圆心角是 $360°$ 时所对的弧是整个圆周，它的长是 $2\pi R$，这里 R 是圆的半径. 所以 $1°$ 圆心角所对的弧长是 $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$，$n°$ 的圆心角所对的弧长

$$l=\frac{n\pi R}{180},$$

这里角度 n 是用角度制表示的.

[例 3]　在半径为 80 厘米的圆中，问 $98°30'$ 的圆心角所对的弧长等于多少?

解：这里先把 $98°30'$ 化为 $98.5°$，然后代入上式得

$$l=\frac{n\pi R}{180}=\frac{98.5\times3.14\times80}{180}\approx137.5.$$

即弧长约为 137.5 厘米.

[例 4]　如果圆上的一段弧长 l 与半径 R 相等，问这段

弧所对的圆心角为多少?

解：因 $l=R$，代入弧长公式，得

$$R=\frac{n\pi R}{180},$$

$$\therefore \quad n=\frac{180}{\pi}\approx 57.296^\circ.$$

于是所求圆心角约为 57.296°.

二、弧　度　制

角的大小除用角度制度量外，还常用弧度制表示．例如在高等数学中，几乎都用弧度制．

弧度制是这样规定的：

定义　在圆周上取一段弧，使其长等于半径，于是这段弧所对的圆心角定为一弧度．

这样，当弧长等于 R 时，圆心角＝1 弧度，弧长＝$2.5R$ 时，圆心角＝2.5 弧度．

一般地说，当圆心角所对的弧长是半径 R 的 α 倍时，这个圆心角就是 α 弧度．所以对任意一个角，要确定它的弧度值，可以把这个角看做是某一个半径为 R 的圆的一个圆心角，如果它所对的弧长为 l，这个角的弧度值为

$$\alpha=\frac{l}{R}.$$

如果在一个半径为 R 的圆中，已知圆心角的弧度值为 α，则它所对的弧长 l 为

$$l=\alpha R.$$

必须注意，在这个求弧长的公式中，圆心角 α 的大小是用弧度而不是用角度表示的．

角度制是以"度"为度量单位的，而弧度制则以"弧度"为

度量单位，两者既有区别，也有联系，它们可以互相换算.

因为半径为 R 的圆周长是 $2\pi R$，它所对的圆心角是一个周角，若用角度制表示，则为 $360°$，若用弧度制表示，则为 $\frac{2\pi R}{R}=2\pi$ 弧度，因此有

$$360°=2\pi \text{ 弧度},$$

所以

$$1°=\frac{\pi}{180} \text{ 弧度} \approx 0.01745 \text{ 弧度},$$

$$1 \text{ 弧度}=\frac{180°}{\pi} \approx 57.296°=57°17'45''.$$

下面是几个常用的角度和弧度的对应值，应该记住.

角度 $n°$	$360°$	$270°$	$180°$	$90°$	$60°$	$45°$	$30°$
弧度 α	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

[例 5] (1) 化 $72°12'$, $108°48'$ 为弧度；

(2) 化 $\frac{3\pi}{5}$ 弧度，2.4 弧度为度数.

解：(1) $72°12'=72.2°=72.2\times0.01745\approx1.26$ 弧度，

(有时弧度两字也可以不写.)

$108°48'=108.8°=108.8\times0.01745\approx1.9$；

(2) $\frac{3\pi}{5}$ 弧度 $=\frac{3\times180°}{5}=108°$，

2.4 弧度 $=2.4\times57.29°\approx137.5°=137°30'$.

[例 6] 为了避免由于膨胀而引起蒸气管破裂，蒸气管道中一般都装有膨胀节，它是用一根直圆管弯曲制成的，如图 4-35 所示，试求管道的总长.

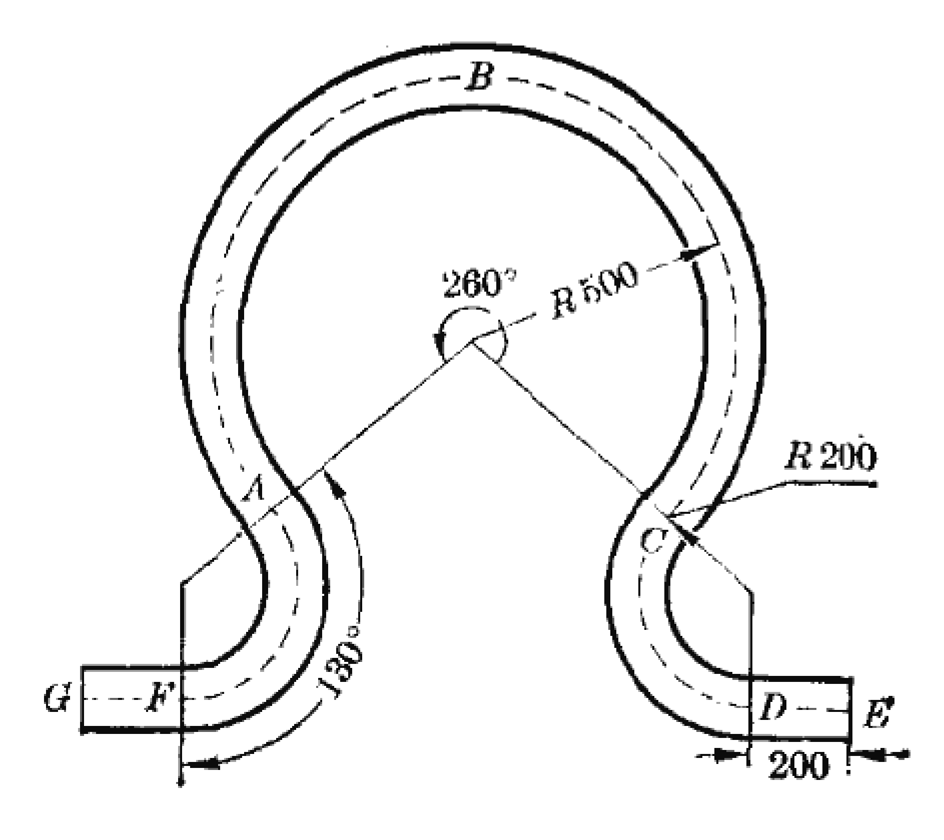


图 4-35

解：从图可见，$\overset{\frown}{ABC}$ 所对的圆心角为 260°，$\overset{\frown}{CD}$ 和 $\overset{\frown}{AF}$ 所对圆心角为 130°．先化它们为弧度，再求弧长．

$$\overset{\frown}{ABC}=260\times0.01745\times500,$$

$$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AF}=130\times0.01745\times200,$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 总长&=GF+\overset{\frown}{FA}+\overset{\frown}{ABC}+\overset{\frown}{CD}+DE\\&=2GF+2\overset{\frown}{FA}+\overset{\frown}{ABC}\\&=2\times200+2\times130\times0.01745\times200\\&\quad+260\times0.01745\times500\\&=400+0.01745(2\times130\times200+260\times500)\\&\approx3576(毫米).\end{aligned}$$

[例 7] 工厂里常要计算传动皮带轮皮带的长度．机器上皮带传动的方式有开式和交叉式两种，下面介绍开式皮带轮皮带长度的计算．

在图 4-36 中，已知两皮带轮的中心距 $O_1O_2=244$ 厘米，大轮半径 $R_1=30$ 厘米，小轮半径 $R_2=13$ 厘米，试求皮带的长．

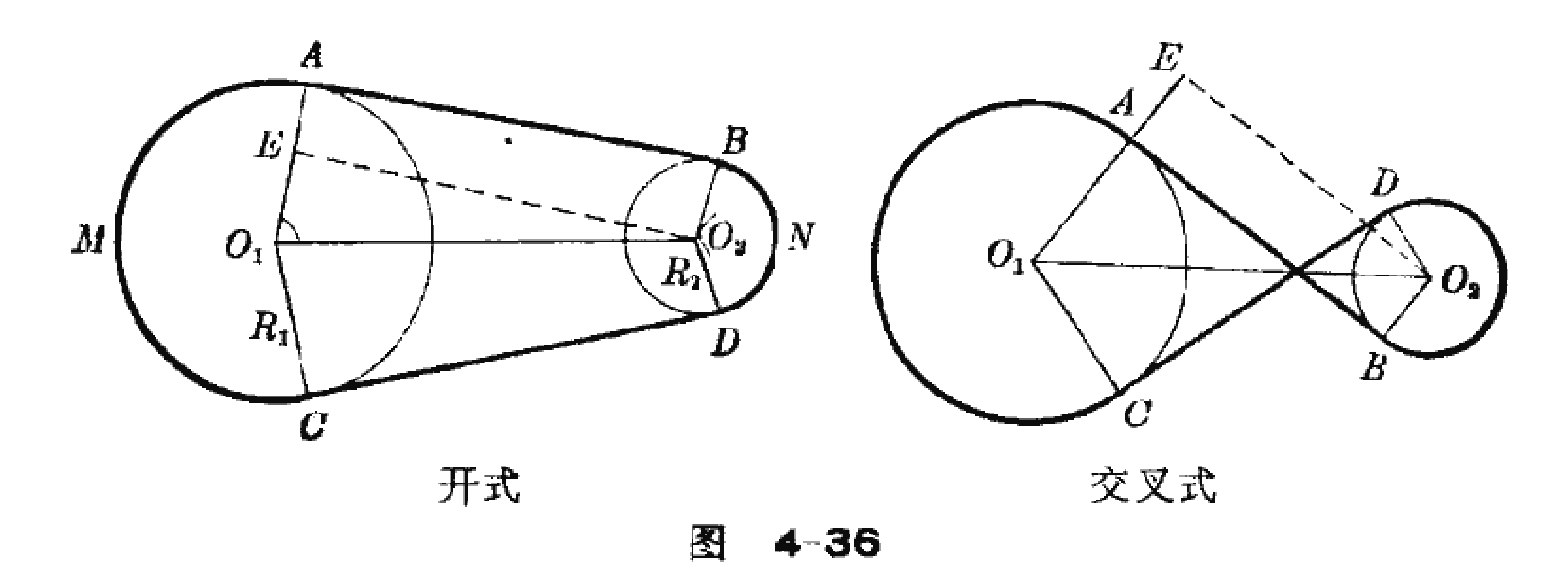


图 4-36

解：作 $O_2E \perp O_1A$，则

$$O_2E = AB = CD, \quad O_1E = R_1 - R_2 = 30 - 13 = 17.$$

由勾股定理，

$$O_2E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1E^2} = \sqrt{244^2 - 17^2} \approx 243.4.$$

又在直角三角形 O_1O_2E 中，

$$\cos\angle EO_1O_2 = \frac{O_1E}{O_1O_2} = \frac{17}{244} = 0.06967,$$

$$\therefore \quad \angle EO_1O_2 \approx 86°, \quad \angle AO_1C \approx 172°.$$

因此可得 $\overset{\frown}{AMC}$ 所对的圆心角是 188°，$\overset{\frown}{BND}$ 所对的圆心角是172°，由弧长公式得

$$\overset{\frown}{AMC} = \frac{188 \times \pi \times 30}{180} \approx 98.42,$$

$$\overset{\frown}{BND} = \frac{172 \times \pi \times 13}{180} \approx 39.02.$$

$$\therefore \quad 皮带长 = AB + CD + \overset{\frown}{AMC} + \overset{\frown}{BND}$$

$$= 2 \times 243.4 + 98.42 + 39.02 = 624.24(厘米).$$

至于交叉式情形，读者可照图 4-36，按已给数据自己进行计算.

小　结

圆周长：$C = \pi D$，　$C = 2\pi R$.

弧长：　　$l=\frac{n\pi R}{180}$（n 以角度制计算）.

弧度：在圆周上取一段弧，使其长度等于半径，这段弧所对的圆心角的大小叫做一弧度.

圆的半径为 R，圆心角的弧度值为 α，这个角所对的弧长

$$l=\alpha R.$$

弧度制与角度制间的关系：

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\approx 0.01745\ (\text{弧度}),$$

$$1(\text{弧度})=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57.296^\circ=57^\circ 17' 45''.$$

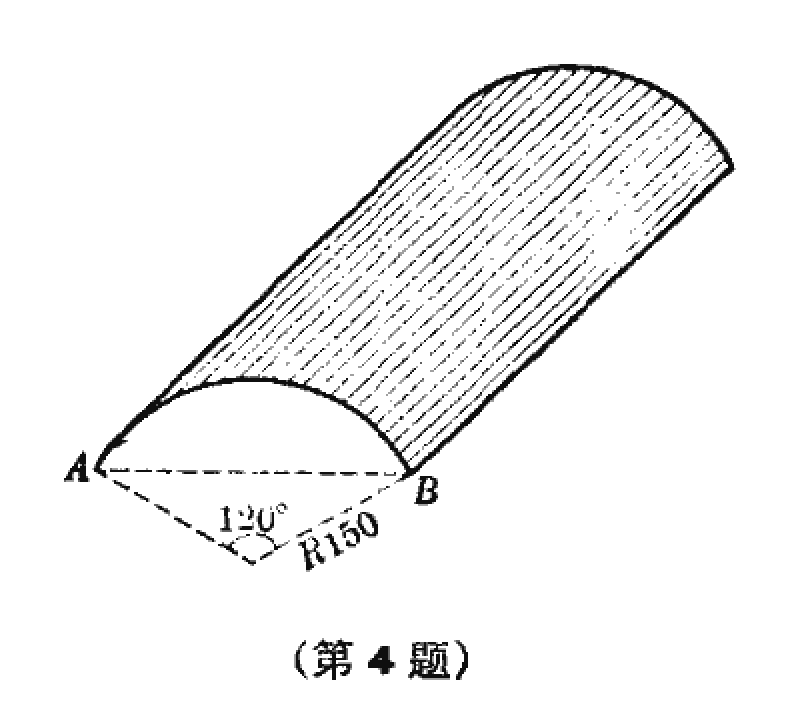
习　题

1．把 120°，135°，150°，225°，240°，315° 用弧度表示.

2．把 1.2，3，$\frac{\pi}{5}$，$\frac{4\pi}{5}$ 弧度的各个角，用角度表示.

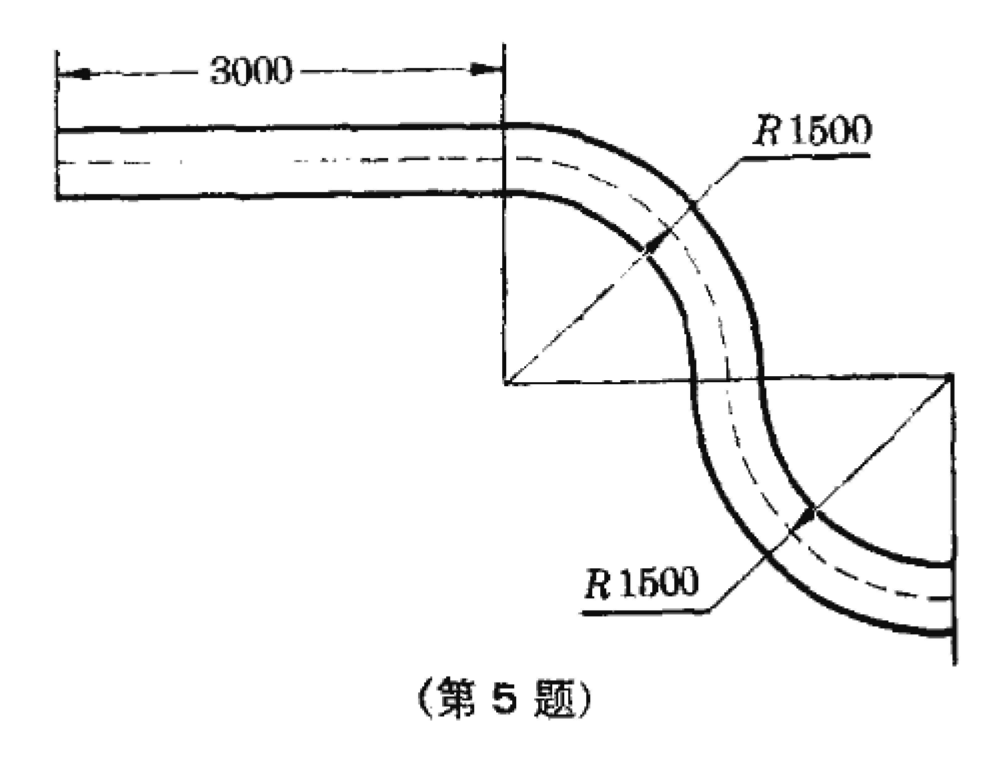
3．滑轮半径是 180 毫米，皮带附着滑轮的弧长是 200 毫米，求这弧所对的圆心角.

4．某机器上的叶片是用钢板弯成的一段圆弧，它所对的圆心角是 120°，半径是 150 毫米，试求下料时钢板的宽度.



（第 4 题）

5. 下图是一条自动化碾米机的管道，尺寸的单位是毫米，求管道的总长.



(第 5 题)

6. 已知圆的半径为 R，计算圆内接正三边形，正五边形，正六边形的一边所对的弧长.

第四节　圆的面积

一、圆和扇形的面积

我们已经知道了三角形、平行四边形等直线形的面积的计算. 圆是曲线形，它的面积如何计算呢?

设想把圆周划分为许多小段，每小段弧用它所对的弦代替，这许多弦就构成一个圆的内接多边形. 我们来看圆面积和它的内接多边形面积的关系.

假定我们先把圆周 n 等分，顺次连接等分点，画出一个圆的内接正 n 边形(图 4-37)，以 a 表示正 n 边形的边长，d 表示圆心到正 n 边形一边的距离，那末，画出 n 条半径就把这个正 n 边形分成 n 个全等的三角形，由于每个三角形的面

图 4-37

积为 $\frac{1}{2}ad$，故正 n 边形的面积为

$$S_n=\frac{1}{2}nad,$$

或者

$$S_n=\frac{1}{2}pd,$$

其中 $p=na$ 表示正 n 边形的周长.

当我们把等分数 n 成倍增加时，譬如先是 12 等分，再 24 等分，再 48 等分……，这样分割下去，每段弧就越来越短，它的长度也就越来越近于它所对的弦的长度. 这时圆内接正多边形的面积 S_n 就越来越趋近于圆的面积 S（记作 $S_n\to S$），p 就无限趋近于圆周长 $C(p\to C)$，d 也无限趋近于圆的半径 $R(d\to R)$，因此根据正多边形面积公式，我们就可以得出圆的面积 S 为

$$S=\frac{1}{2}CR,$$

再以 $C=2\pi R$ 代入，得

$$S=\pi R^2.$$

定理 圆的面积等于圆周率 π 乘半径的平方.

[例 1] 一根圆管的外径为 150 毫米，内径为 100 毫米，求这圆管横断面的面积.

解：显然，所求圆管横断面的面积 S 等于大圆面积与小圆面积之差，即

$$S=\pi\left[\left(\frac{150}{2}\right)^2-\left(\frac{100}{2}\right)^2\right]$$
$$=3.1416(75^2-50^2)$$
$$\approx 9818(\text{毫米}^2).$$

即 圆管横断面积约等于 9818 平方毫米.

扇形是圆的一部分，它是由一段弧和过这段弧端点的两条半径围成的图形（图 4-38 中阴影部分）．扇形的面积可以通过圆面积来计算．

把圆周 360 等分，过每一分点引半径，这样就把圆分成 360 个全等的扇形，每个扇形所含的圆心角是 $1°$，因此在半径为 R 的圆中，圆心角为 $1°$ 的扇形面积应该等于圆面积 πR^2 的 $\frac{1}{360}$，圆心角为 $n°$ 的扇形面积则等于 πR^2 的 $\frac{n}{360}$（图 4-38），故得扇形面积的计算公式为

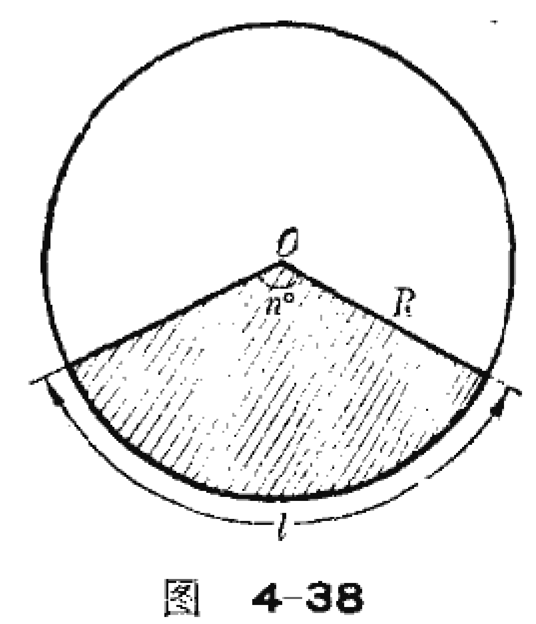


图 4-38

$$S_{扇形}=\frac{n\pi R^2}{360},$$

这里 n 表示扇形圆心角的度数．

如果扇形圆心角用 α 弧度表示，则 $\alpha=\frac{n\pi}{180}$ 弧度，又扇形的弧长 $l=\alpha R$，所以上面公式也可写为

$$S_{扇形}=\frac{\alpha R^2}{2}=\frac{lR}{2}.$$

定理 扇形的面积等于它的弧长与半径相乘积的一半．

［例 2］ 污水从圆形排水管引到郊区溉灌农田，已知管子的半径是 120 厘米，管内污水最深处是 60 厘米，问管子截面上有水部分的面积是多少（图 4-39）．

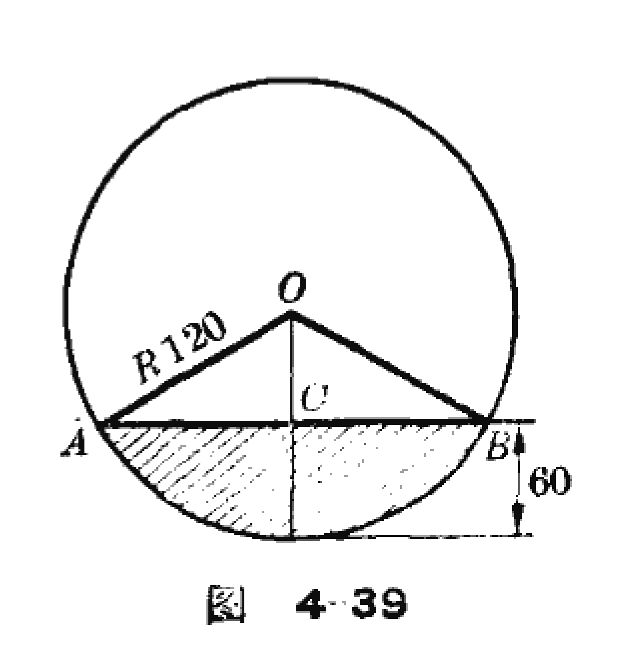


图 4-39

解：图 4-39 表示水管的截面，AB 为水面，管中有水部分的面积，

就是扇形 OAB 与三角形 OAB 面积的差.

由已知 $OA=120$, $OC=120-60=60$,

得
$$\cos\angle AOC=\frac{1}{2},$$

$\therefore\quad \angle AOC=60°,\quad \angle AOB=120°.$

$\therefore$ 扇形 OAB 的面积 $S_1=\dfrac{120\pi\cdot 120^2}{360}=4800\pi.$

又

$$\triangle OAB \text{ 的面积} S_2=\frac{1}{2}AB\times OC=\frac{1}{2}\times 2AC\times OC$$
$$=AC\times OC=120\sin 60°\times 60=3600\sqrt{3},$$

$\therefore$ 所求面积

$$S=S_1-S_2=4800\pi-3600\sqrt{3}\approx 8844(\text{厘米}^2).$$

即管内有水部分面积约等于 8844 平方厘米.

象上面有水部分的图形叫做弓形, 它是由一条弧和弧所对的弦围成的图形.

二、展开图的面积

工人同志在用铁皮制造圆柱、圆锥、圆台形的物体时,先要画出它的表面展开图,求出所需钢板面积的大小,然后进行合理下料. 现在把这三种物体的表面展开图及其面积的计算方法综述于下.

1. 圆柱表面展开图

我们日常看到的钢管、油桶等都是圆柱形物体,它们上下一般粗,底面是圆形的.

圆柱可以看做是由一个矩形(如图 4-40(甲)中 OO_1A_1A),绕着它的一边 OO_1 旋转一周产生的一种立体,线段 OO_1 叫圆柱的轴, AA_1 叫圆柱的母线,由 OA 和 O_1A_1 旋转分别产生的

两个圆叫圆柱的上底和下底，两底间距离是圆柱的高，母线 AA_1 旋转所成的面叫圆柱的侧面.

为了计算圆柱的侧面积，设想沿圆柱侧面的一根母线把侧面剪开摊平，得到如图 4-40(乙)所示的一个长方形，这长方形的长等于圆柱底面的周长 $2\pi R$(R 是圆柱底面的半径)，宽等于圆柱的高 H，因此，圆柱的侧面积 $S_{侧}$ 的计算公式为

$$S_{侧}=2\pi RH.$$

图 4-40(乙)中的长方形就是圆柱的侧面展开图，加上表示上下底的两个圆就是圆柱的表面展开图了，所以，圆柱的表面积为

$$S_{表}=2\pi RH+2\pi R^2=2\pi R(H+R).$$

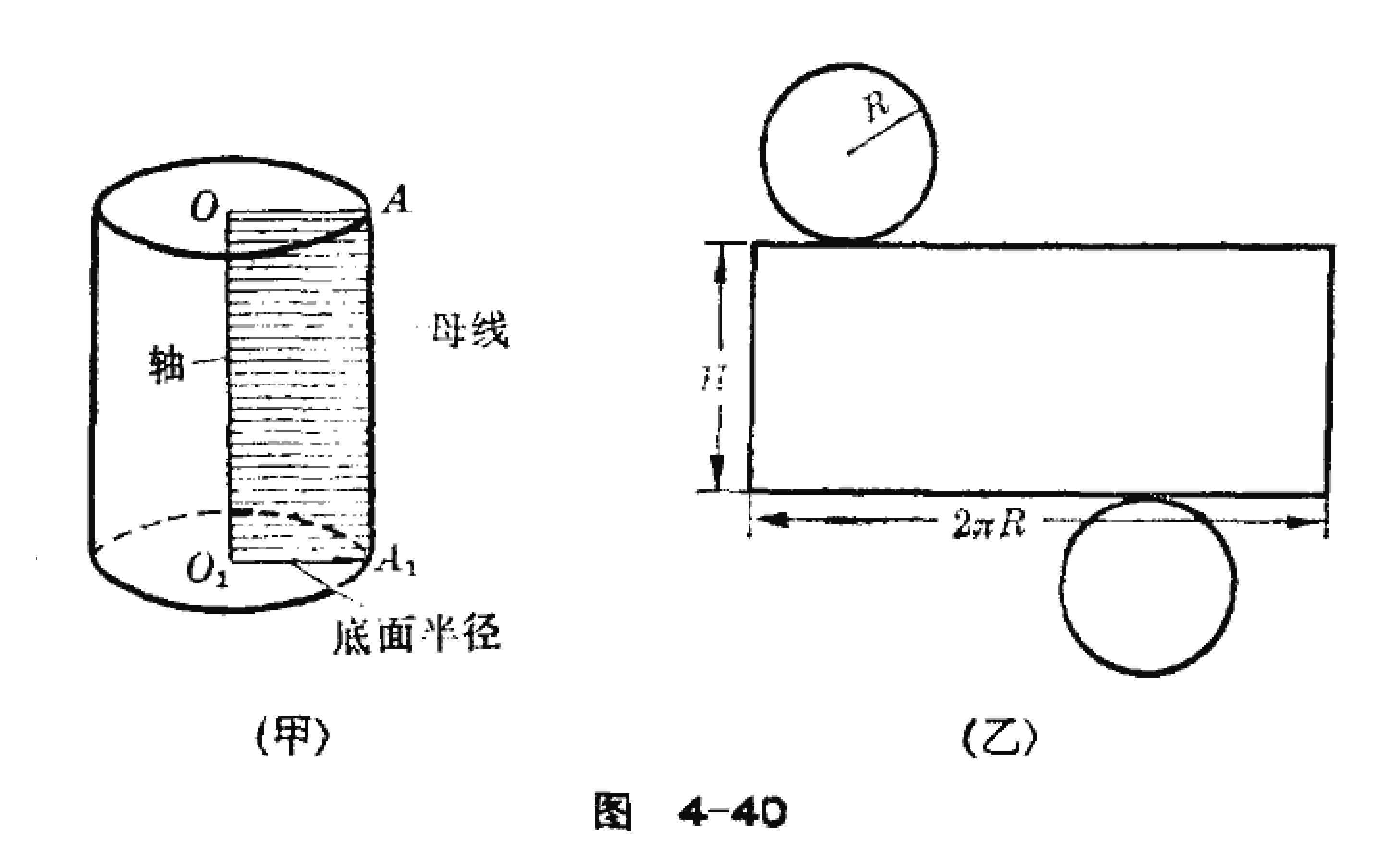


图 4-40

2. 圆锥表面展开图

在工农业生产中，我们也看到许多圆锥体，如车床的顶针，烟囱盖，灯罩，谷堆的顶部等等，它的上部是尖顶，下底是圆.

圆锥可以看做是由一个直角三角形（如图 4-41(甲)的 $\triangle VOA$）绕着它的一条直角边 VO 旋转一周产生的. VO 叫

圆锥的轴，V 叫顶点．VA 叫母线，底部的圆叫底面．

沿圆锥侧面的一根母线剪开，摊平，我们看到圆锥的侧面展开图是一个扇形（图 4-41（乙）、（丙）），扇形的半径是圆锥的母线 l，扇形的弧长是圆锥底面的周长 C，如果圆锥底面的半径为 R，则圆锥的侧面积与表面积分别为

$$S_{侧}=\frac{1}{2}Cl=\pi Rl,$$

$$S_{表}=\pi Rl+\pi R^2=\pi R(l+R).$$

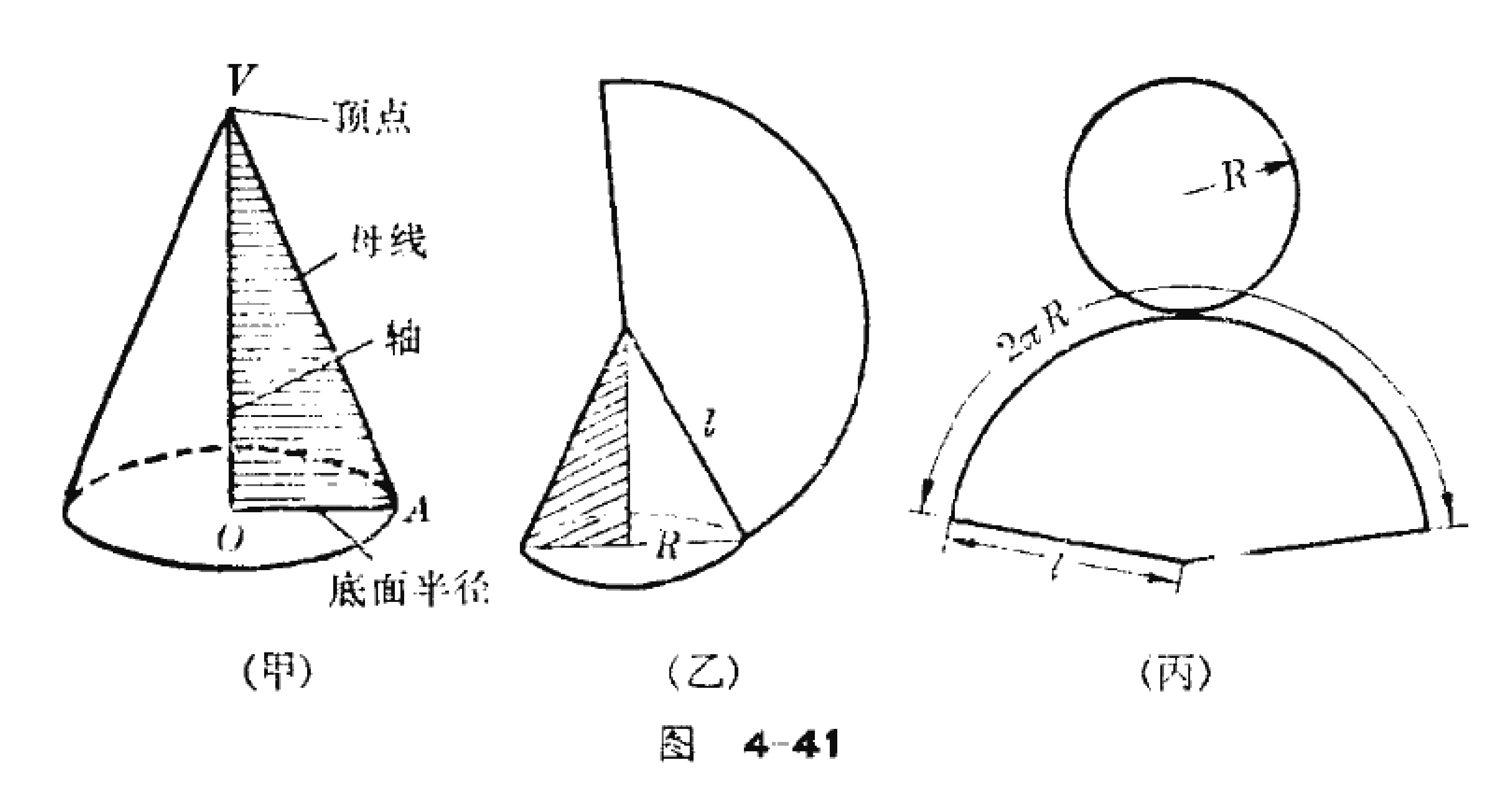


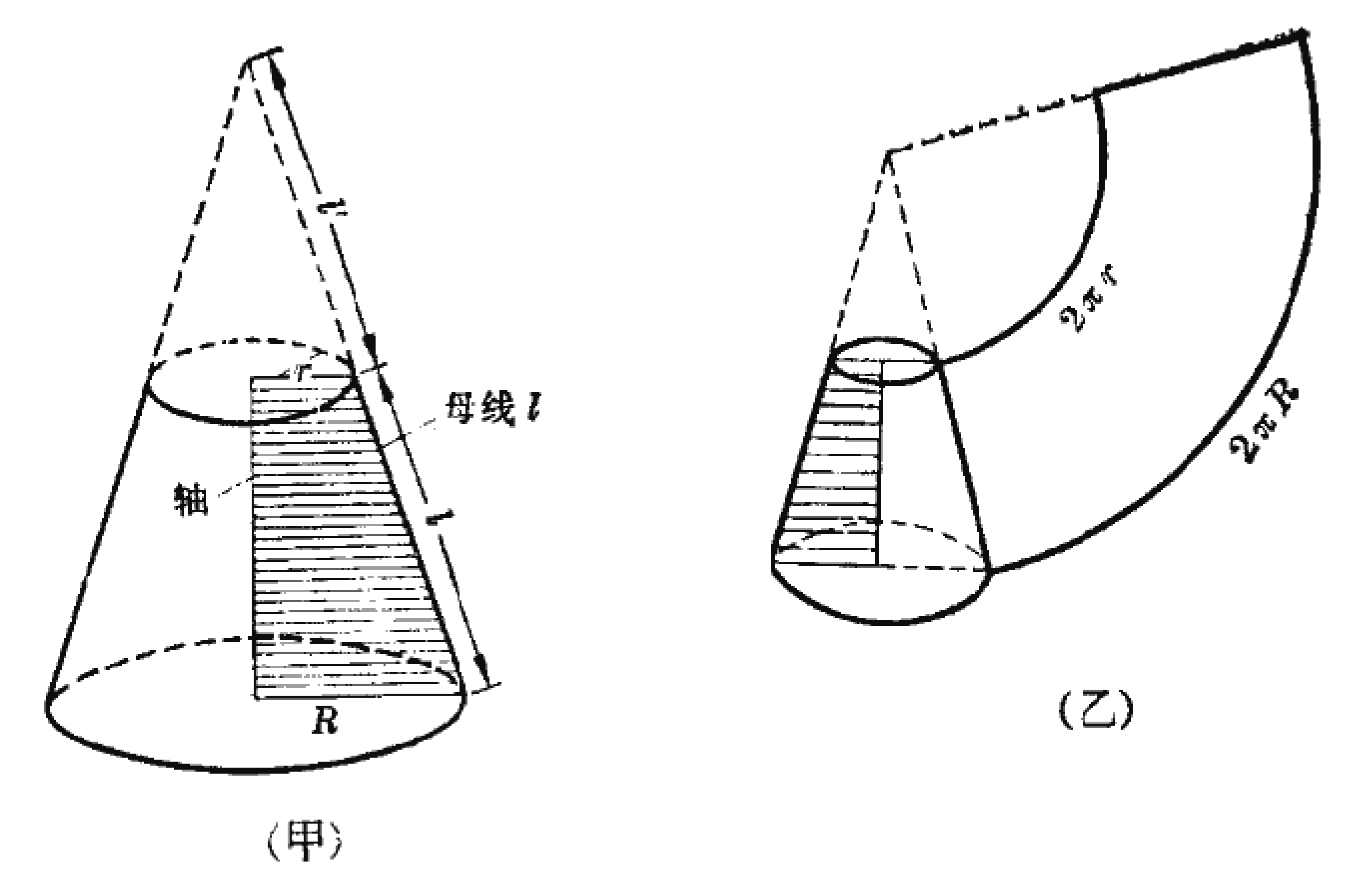
图 4-41

3．圆台表面展开图

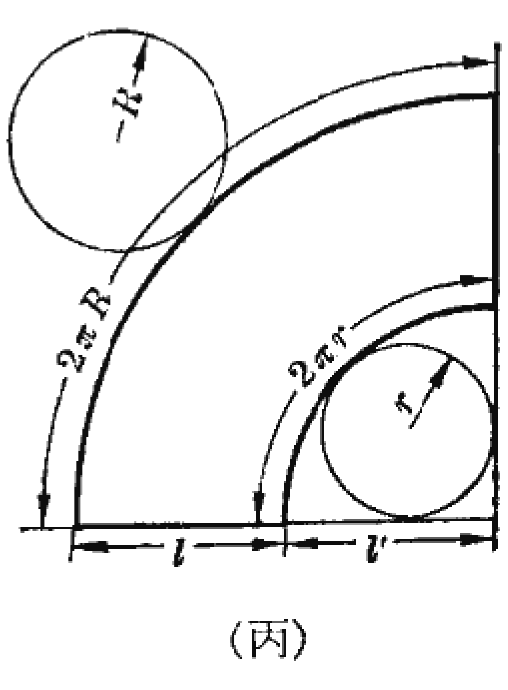
日常用的铅桶是圆台形．圆台是一个圆锥被平行于底面的平面所截而成的，它的上底和下底是大小不同的两个圆．圆台可以看做是由一个直角梯形绕着垂直于底边的腰旋转一周而得到的．

圆台的侧面展开图是由一个大的扇形截去一个小的扇形构成的（这种图形叫扇环），这两个扇形的弧长分别为 $2\pi R$ 及 $2\pi r$（图 4-42）．

设圆台的母线为 l，小弧的半径为 l'，则大弧的半径为 $l+l'$，因此圆台的侧面积为



（甲）　　（乙）



（丙）

图 4-42

$$S_{侧}=\pi R(l+l')-\pi rl'=\pi Rl+\pi l'(R-r).$$

再从图 4-42(甲)有

$$\frac{l'}{l+l'}=\frac{r}{R},$$

解得

$$l'=\frac{rl}{R-r}.$$

代入上面式子中，便得

$$S_{侧}=\pi Rl+\pi\frac{rl}{R-r}(R-r),$$

即

$$S_{侧}=\pi l(R+r).$$

圆台的表面积为

$$S_{表}=\pi l(R+r)+\pi(R^2+r^2).$$

上面这三种立体：圆柱、圆锥、圆台，都可以看做是由平面图形旋转而成，所以都叫做旋转体.

前面所讲只是几种最简单的有规则图形的表面积计算，但在实际中，更多的是由这些简单图形组成的组合体，这种组合体的表面积可以通过它的各个组成部分来计算.

[例 3] 求图 4-43 中阴影部分的面积(图中尺寸的单位为毫米).

解：图中阴影部分面积是一个梯形和上面一个半圆减去中间一个小圆的面积，故

$$S=\frac{1}{2}(36+20)\times10+\frac{\pi}{2}\times12^2-\pi\times4^2$$

$$=280+56\times3.14\approx455.84(毫米^2).$$

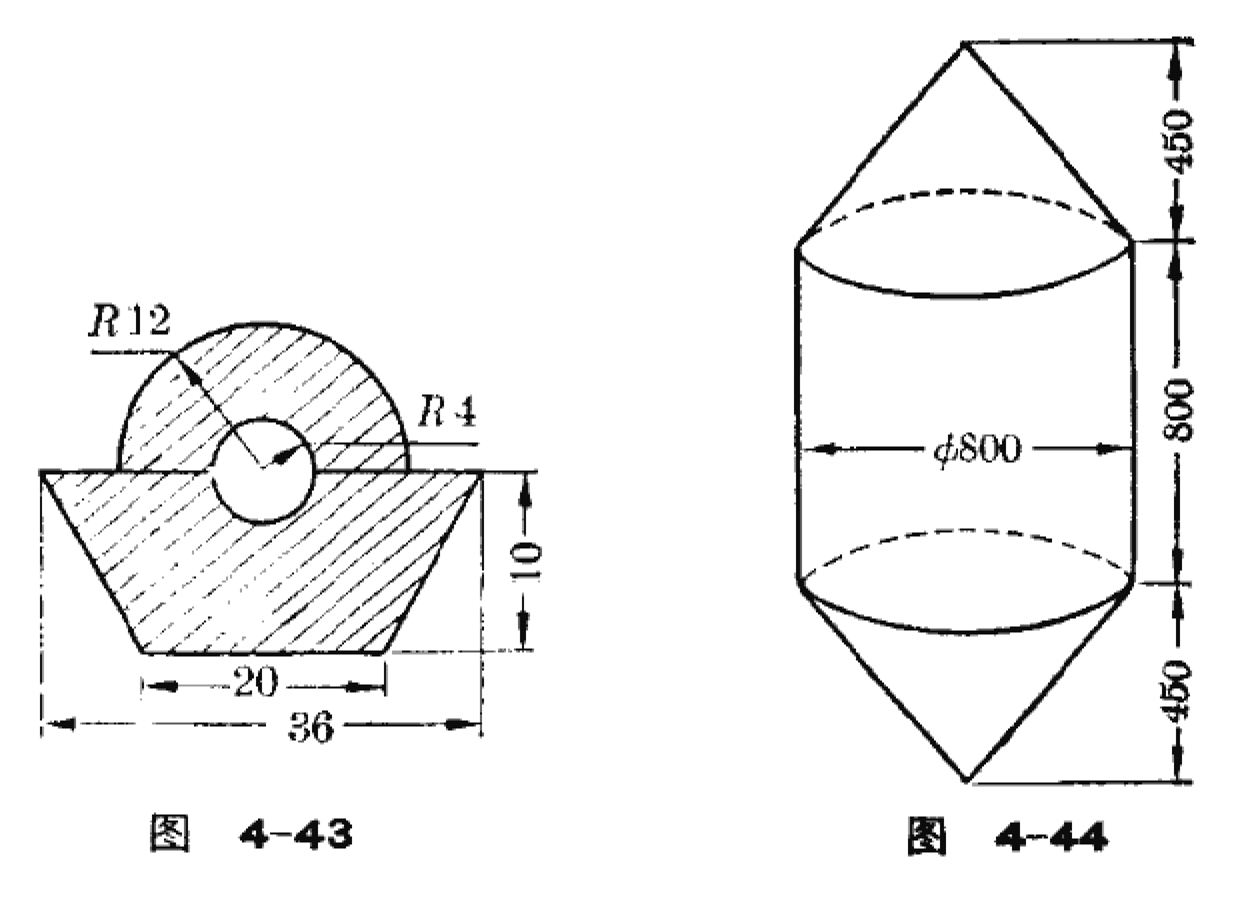


图 4-43　　　图 4-44

[例 4] 打捞船上浮筒的尺寸如图 4-44(单位：毫米)，求浮筒的表面积.

解：浮筒的立体图形是由一个圆柱形和上下两个圆锥形组成，各部分的侧面积分别是

圆柱形：

$$S_1=\pi DH=\pi\times800\times800=64\times10^4\pi,$$

圆锥形：

$$\begin{aligned}S_2&=\pi Rl=\pi R\sqrt{R^2+h^2}\\&=\pi\times400\sqrt{400^2+450^2}\\&\approx\pi\times400\times602=240800\pi,\end{aligned}$$

所以浮筒的表面积

$$\begin{aligned}S&=S_1+2S_2=640000\pi+2\times240800\pi\\&=1121600\times3.14\approx3521824.\end{aligned}$$

即浮筒的表面积约为3521824平方毫米或3.5平方米.

[例5] 石油桶高90厘米，内径56厘米，石油的容重是0.7克/厘米^3，求每桶石油的重量

解：由物理学知道：重量＝容积×容重，所以在这里我们先要求出石油桶的容积.

因为石油桶是圆柱形，所以

容积 $V=\pi R^2h$

$$\begin{aligned}&=3.14\times\left(\frac{56}{2}\right)^2\times90\\&\approx221558.4,\end{aligned}$$

重量 $W=221558.4\times0.7$

$$\begin{aligned}&=155090.88(\text{克})\\&\approx155(\text{公斤}).\end{aligned}$$

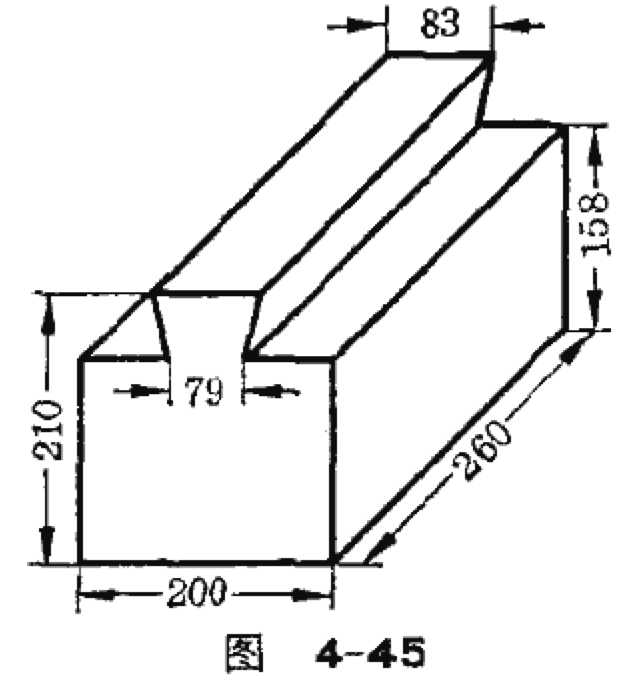


图 4-45

[例6] 求图4-45中（单位：毫米）汽锤锤头的重量，已知钢的容重是7.8吨/米^3.

解：先求锤头的体积V.

这个锤头是由两部分组成的，上面部分是一个底面为梯形的棱柱，下面部分是一个底面为矩形的棱柱，设这两部分体积分别为 V_1 及 V_2，则

$$V_1=\frac{1}{2}(79+83)\times(210-158)\times260=1095120,$$

$$V_2=200\times158\times260=8216000.$$

$$\therefore\quad V=1095120+8216000=9311120\,(\text{毫米}^3)$$
$$\approx0.0093\,(\text{米}^3).$$

$$\therefore\quad \text{汽锤锤头的重量}\approx0.0093\times7.8=0.073\,(\text{吨})$$
$$=73\,(\text{公斤}).$$

［例 7］ 化工厂里有一种沉淀池，上部是圆柱形，下部是圆锥形（如图 4-46，单位：米），求它的容积.

解：圆柱形的容积 $V_1=\pi\left(\frac{9.6}{2}\right)^2\times9.8\approx709,$

圆锥形的容积 $V_2=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{9.6}{2}\right)^2\times4.4\approx106,$

所以沉淀池的容积

$$V=V_1+V_2=709+106=815\,(\text{米}^3).$$

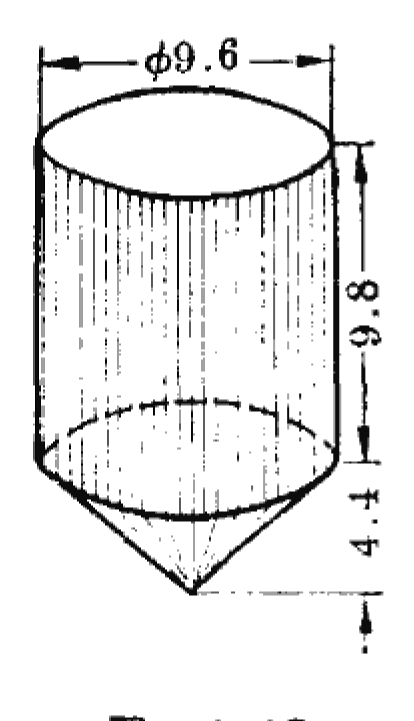


图 4-46

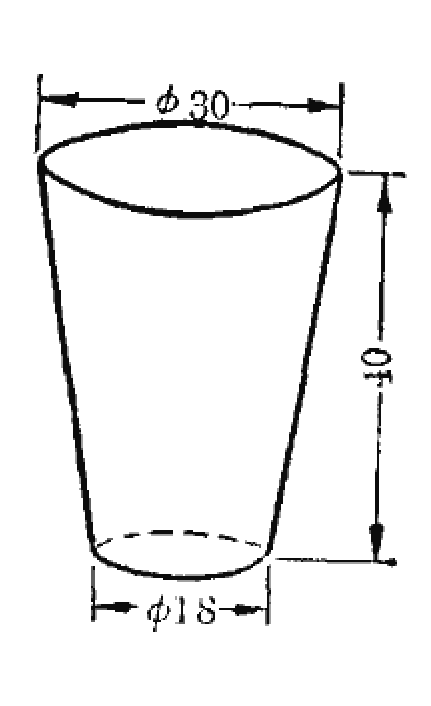


图 4-47

[例 8] 有一个水桶,上口直径 30 厘米,底直径 18 厘米,深 40 厘米,问这个水桶能盛水多少公斤?

解: 这水桶是个圆台形(图 4-47). 将已知值代入圆台的体积公式得到

$$V=\frac{1}{3}\pi h\left(r^2+R^2+rR\right)$$

$$=\frac{1}{3}3.14\times40\left(9^2+15^2+9\times15\right)\approx18463(\text{厘米}^3).$$

因为 1 厘米^{3}的水重 1 克,所以这个水桶能盛水

$$18463\times1=18463\ (\text{克})\approx18.5\ (\text{公斤}).$$

[例 9] 某造纸厂制造纸浆的蒸球是个空心的大圆球,内径为 3.63 米,它的容积是多少?

解: 圆球的半径

$$R=\frac{3.63}{2}=1.82,$$

代入球体体积公式得

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi}{3}\times1.82^3\approx25.24\ (\text{米}^3).$$

[例 10] 一贮油塔上部是球缺,下部是圆柱,尺寸如图 4-48 所示(单位:米),求塔的容积和表面积.

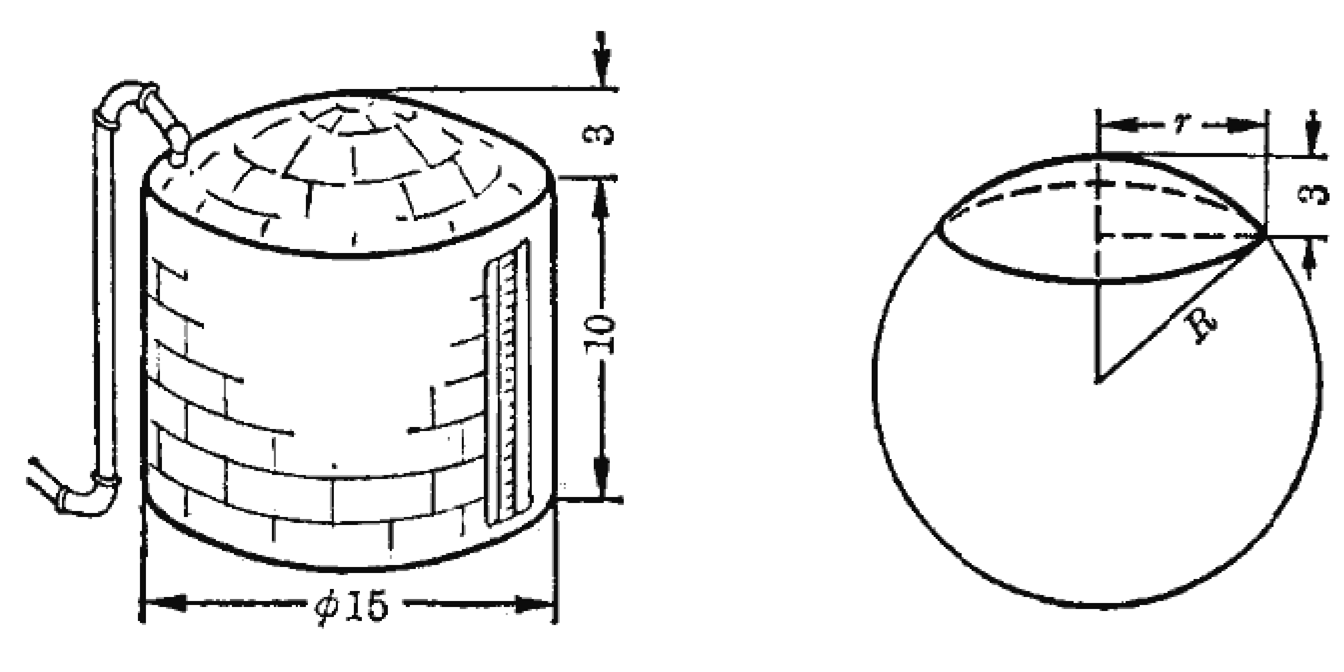


图 4-48

解：塔顶是个球缺，它的高和底半径依次是

$$h=3\text{ 米},\qquad r=\frac{15}{2}\text{ 米}.$$

由勾股定理(图 4-48)，

$$R^2=r^2+(R-h)^2,$$

解出球的半径 R，得

$$R=\frac{r^2+h^2}{2h}=\frac{\left(\frac{15}{2}\right)^2+3^2}{2\times 3}\approx 10.88.$$

把这些值代入球缺的体积公式，得到

$$V_{球缺}=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=\pi\times 3^2\left(10.88-\frac{3}{3}\right)\approx 279.2.$$

塔的圆柱部分体积

$$V_{圆柱}=\pi\left(\frac{15}{2}\right)^2\times 10\approx 1766.3,$$

所以塔的体积

$$V=V_{球缺}+V_{圆柱}\approx 2045.5\ (\text{米}^3).$$

其次再求塔的表面积：

$$S_{球冠}=2\pi Rh=2\pi\times 10.88\times 3\approx 205,$$

$$S_{圆柱}=2\pi\left(\frac{15}{2}\right)\times 10+\pi\left(\frac{15}{2}\right)^2\approx 648,$$

所以塔的表面积

$$S=S_{球冠}+S_{圆柱}\approx 853\ (\text{米}^2).$$

附表1　几种简单平面图形的面积

名　称	图　形	字母意义	面积公式（S表示面积）
正方形		a—边长	$S=a^2$
长方形		a—长 b—宽	$S=ab$
平行四边形		b—底边 h—高	$S=bh$
三角形		b—底 h—高	$S=\frac{1}{2}bh$
梯　形		a—上底 b—下底 h—高	$S=\frac{1}{2}(a+b)h$
圆		R—半径 D—直径 π—圆周率	$S=\pi R^2$ $=\frac{\pi D^2}{4}$
扇　形		R—半径 $n°$—圆心角的度数 l—弧长	$S=\frac{n}{360}\pi R^2$ $=\frac{1}{2}Rl$
弓　形		l—弧长 R—半径 b—弓形的底 h—弓形的高 α—圆心角（弧度）	$S=\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{b(R-h)}{2}$ $=\frac{1}{2}lR-\frac{b(R-h)}{2}$ 近似计算公式 $S=\frac{2}{3}bh+\frac{h^3}{2b}$

附表 2　几种简单立体的表面积和体积

名　　称	图　　形	字 母 意 义	表面积、体积公式（S 表面积、V 体积）
正方体		a－棱	$S=6a^2$ $V=a^3$
长方体		a—长 b—宽 c—高	$S=2(ab+ac+bc)$ $V=abc$
棱　柱		B—底面积 h—高	$V=hB$
圆　柱		R—底圆半径 h—高	$S=2\pi R(h+R)$ $V=\pi R^2h$
棱　锥		B—底面积 h—高	$V=\frac{1}{3}Bh$
圆　锥		R—底圆半径 h—高 l—母线	$S=\pi R(l+R)$ $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$

（续表）

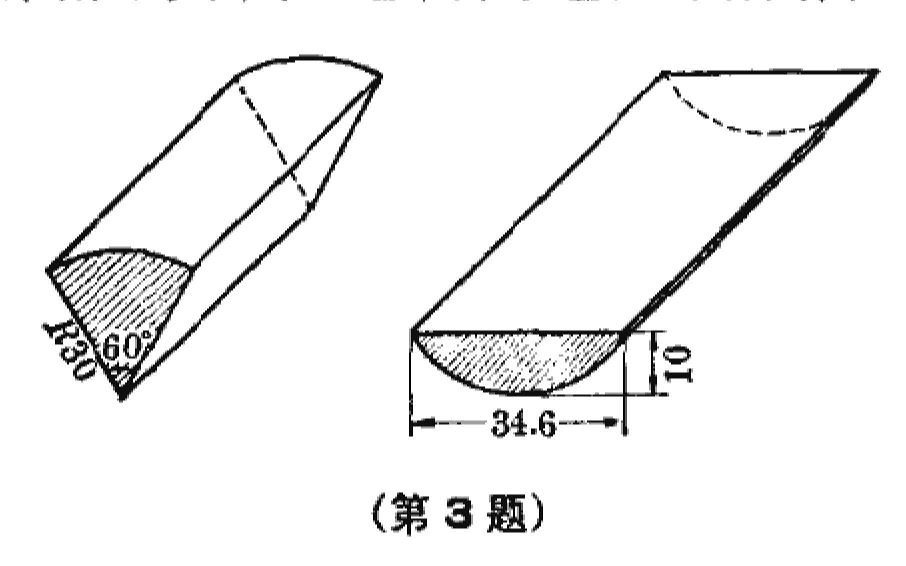
名　称	图　形	字母意义	表面积、体积公式 (S 表面积、V 体积)
棱　台		B_1—上底面积 B_2—下底面积 h—高	$V=\frac{1}{3}h(B_1+B_2+\sqrt{B_1B_2})$
圆　台		r—上底半径 R—下底半径 l—母线 h—高	$S=\pi l(r+R)+\pi(r^2+R^2)$ $V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+R^2+rR)$
球		R—球半径	$S=4\pi R^2$ $V=\frac{4}{3}\pi R^3$
球　冠 球　缺		R—球半径 h—球冠的高	$S_{球冠}=2\pi Rh$ $V_{球缺}=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$

习　　题

1. 手榴弹的爆炸半径是 15 米，求其杀伤面积.

2. 活塞直径约为 300 毫米，蒸汽压力每 1 毫米^{2}约为 0.625 公斤，求活塞所受的蒸汽压力.

3. 下图是两种异型断面钢材，一是扇形断面钢材，另一是弓形断面钢材．试按所给尺寸(单位：毫米)，求它们的断面面积.



（第 3 题）

4. 计算面积：

(1) 一个弓形，它所对的圆心角是 60°，半径 10 厘米，求它的面积；

(2) 一个圆环，外径 R，内径 r，求它的面积.

5. 两个半径分别是 R 和 $3R$ 的圆相外切，求这两个圆的一条外公切线与切点间圆弧所围成的曲线形的面积.

6. 窗框由一弓形和一矩形组成，上边为 60° 的圆弧，窗高为 2.4 米，窗宽为 1.6 米，求窗的面积.

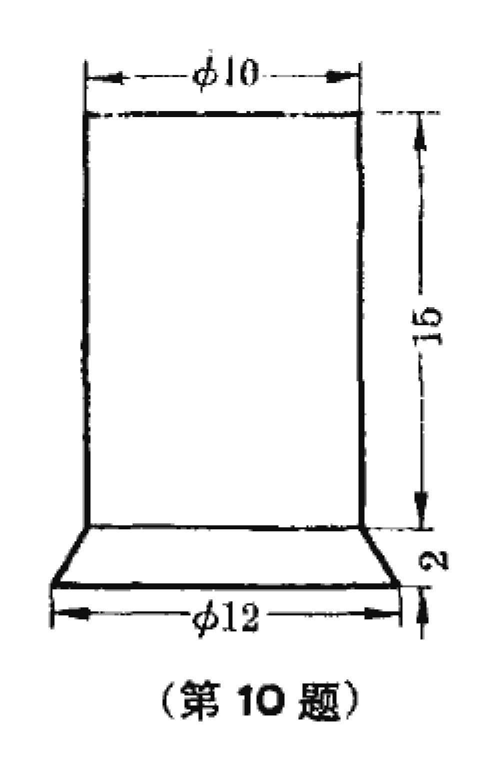
7. 圆锥形灯罩的底面直径为 20 厘米，母线 l 为 14 厘米．求这个灯罩的展开图的面积和圆心角.

8. 一台压路机的滚筒长 1.2 米，直径 0.5 米，如果它转了 10 圈，求它压路的面积.

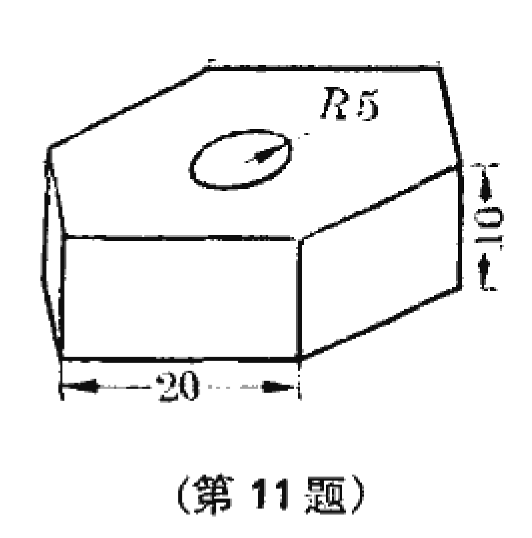
9. $ABCD$ 是边长为 a 的正方形，以各边为直径在它的内部作半圆形，求每相邻两个半圆形所围成的公共部分的面积.

10. “东风号”货轮主舱中有一节通风管，它是由圆柱面与圆台面组合而成，其剖面尺寸如图，试计算它的用料面积(单位：厘米).

11. 某种钢制的六角螺帽尺寸如图(单位：毫米)，问 250 只共重多少公斤？(钢的容重是 7.8 克/厘米^3.)



(第 10 题)

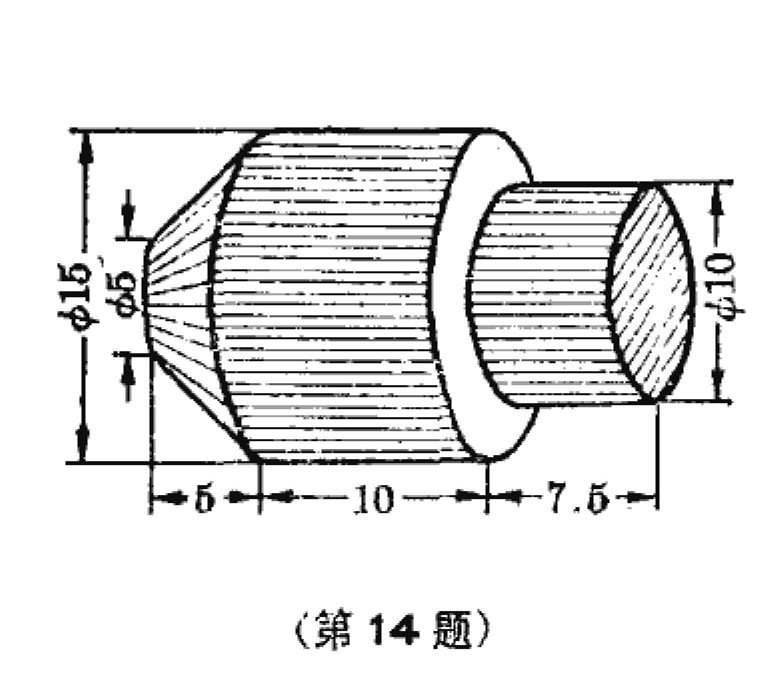


(第 11 题)

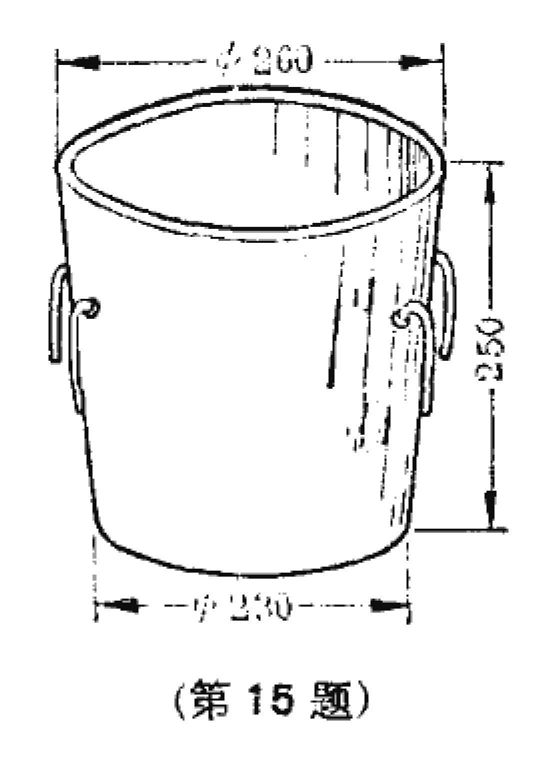
12. 某一轴承内共装钢珠 8 粒，钢珠直径为 14 毫米，原料铬钢的容重为 7 克/厘米^3，求这些钢珠的总重量.

13. 玻璃烧瓶的球体部分的内径为 110 毫米，计算这一部分的容积.

14. 电磁开关铁芯如图所示(单位: 毫米)，求它的体积.



(第 14 题)



(第 15 题)

15. 铸工车间所用的钢包如图所示(单位: 毫米)，求它的容积.

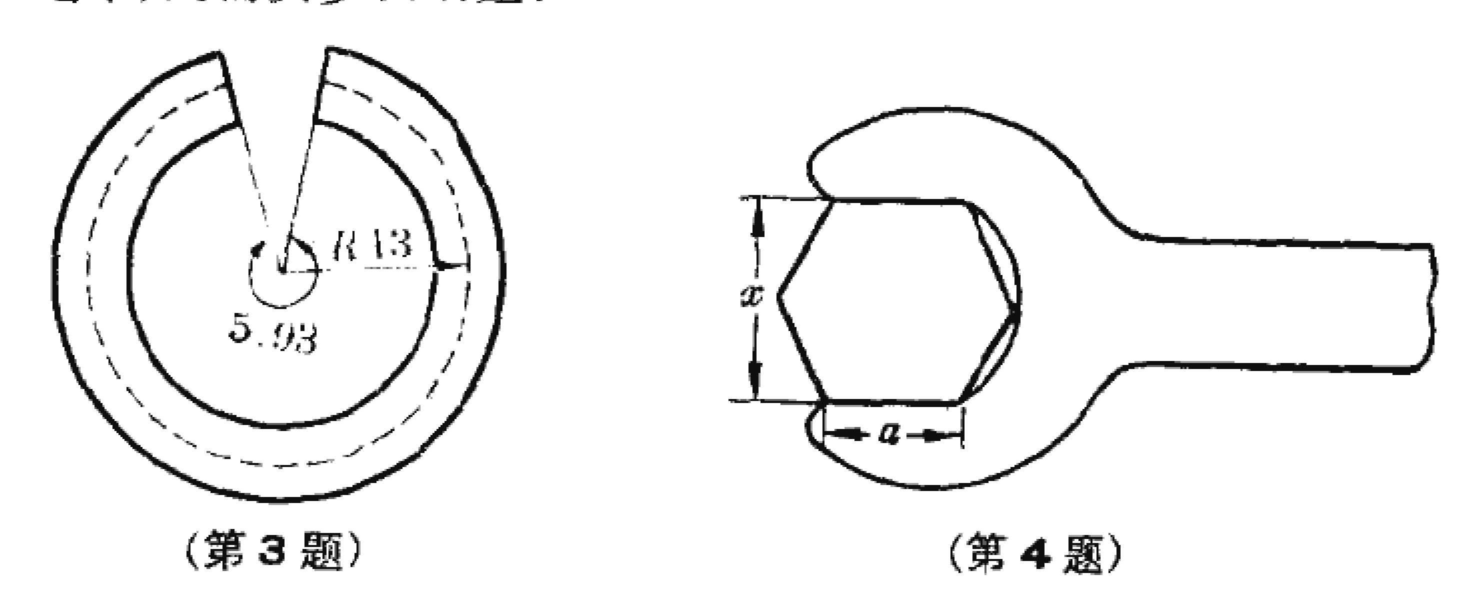
16. 地球的半径约为 6.37×10^3 公里，求地球的面积.

复 习 题

1. 某地修建一个田径场跑道. 内圈总周长 400 米，其中两直线部分各长 100 米，试计算两端半圆部分的半径 R.

2. 某地下建筑，上部为弓形，弓形的弦长与半径均为 10 米，问这弓形的弧长是多长?

3. 活塞的锁环是由钢丝做成的. 已知中心角是5.93弧度，半径 $R=13$ 毫米，问需要多长钢丝？



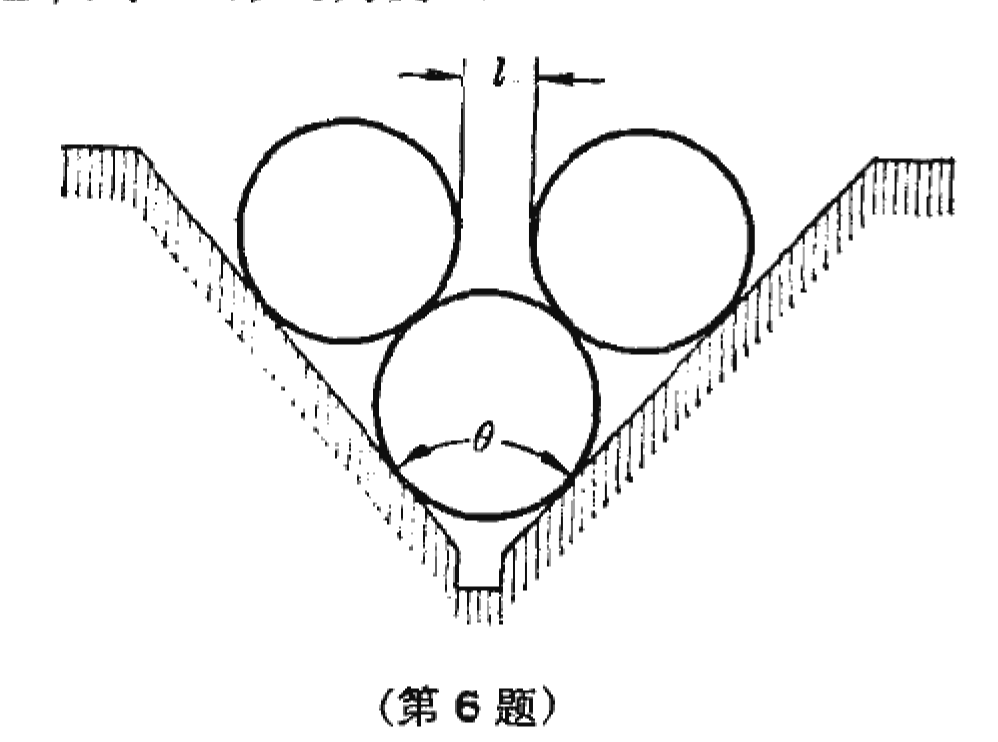
（第 3 题）　　（第 4 题）

4. 一种边长 $a=8$ 毫米的六角螺帽的固定扳手，扳手开口与螺帽间的间隙为 0.3 毫米. 问扳手开口 x 应设计多大？

5. 从半径为 R 的圆钢上截出一个正八边形工件，证明它的每边长

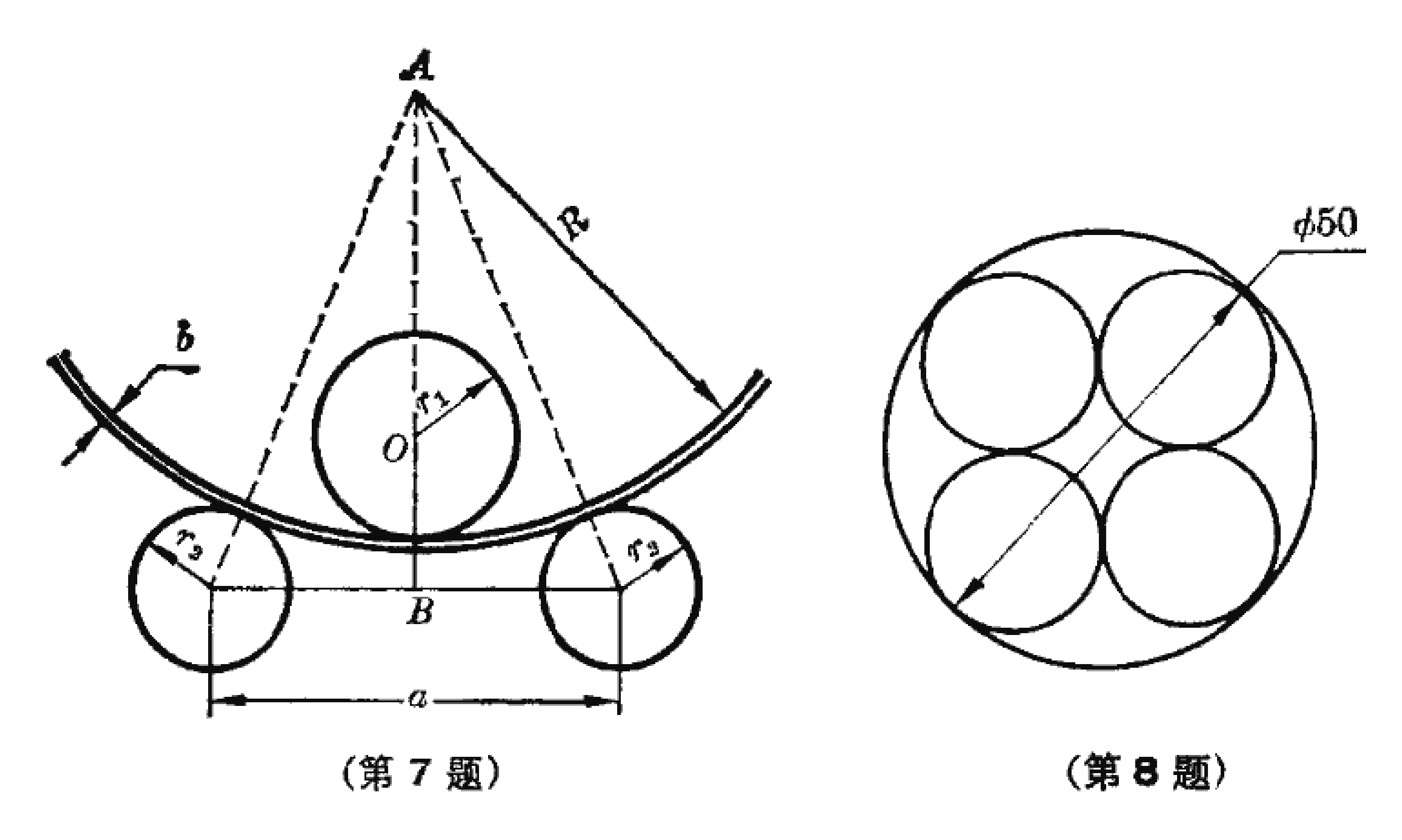
$$a=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,R.$$

6. 用三个直径为 20 毫米的圆柱检验 V 形槽的角度时(如图)，量得 $l=5.75$ 毫米，求 V 形的角度 θ.



（第 6 题）

7. 在轧床上，利用三根轧辊筒转动，可以把钢板轧成圆筒形，如剖面图所示，三个圆表示轧辊筒，底下两个圆的半径是 r_2，距离 a 是固定的，上面一个圆的半径是 r_1，位置可以上下调节. 如果已知 $a=40$ 厘米，$r_1=10$ 厘米，$r_2=7.5$ 厘米，钢板厚度 $b=0.5$ 厘米，今要把钢板轧成半径 $R=44$ 厘米的圆筒，问 OB 的长度应调节到多少？



（第 7 题）　　（第 8 题）

8. 利用一批直径 $D=50$ 毫米的圆形铁片废料冲制垫圈，如果每块冲制四个一样大的垫圈，试计算垫圈的最大直径.

9. 烟囱上的圆锥形风帽展开图是一个扇形，设其斜高为 20 厘米，圆锥底面直径为 35 厘米，试求这扇形铁皮的面积.

10. 用铅皮制成的圆锥体零件的底面直径为 240 毫米，高 320 毫米，这个圆锥体的侧面展开后成一扇形，试计算这个扇形的半径 R，弧长 l，扇形角 θ.

11. 一个半径长 15 厘米，圆心角是 216° 的扇形，可以卷成高是多少的圆锥？

12. 要油漆 10 只圆台形水桶外部的侧面与下底面，每只水桶的上下底直径分别为 30 厘米和 25 厘米，母线长 28 厘米，已知 1 米^2 的面积约需 150 克油漆，问共需油漆多少？

13. 要做一只能放油 90 升(1 升＝1000 立方厘米)的油箱，高 50 厘米. 试计算一下，做圆底油箱比做方底油箱能节约多少材料(注：不做盖子，不计加工等损耗).

14. 在半径为 10 厘米的钢球内，以它的一条直径为轴，钻一个直径为 12 厘米的圆柱形孔，求钻孔后钢球的表面积.

第五章　直线和圆的方程

毛主席教导我们："**在生产斗争和科学实验范围内，人类总是不断发展的，自然界也总是不断发展的，永远不会停止在一个水平上。因此，人类总得不断地总结经验，有所发现，有所发明，有所创造，有所前进。**"

在前面几章中，我们已经用几何方法初步研究了三角形和圆等图形，但是实践中遇到的图形除三角形和圆之外，还有形状更复杂的曲线．例如子弹运动的轨道、人造卫星绕地球运行的轨道、齿轮的齿形、凸轮的轮廓线等等．因此，要求我们扩充研究图形的范围．

另一方面，实践中很多问题对图形的讨论提出了新的要求，即更精确地定量描写种种曲线．例如，精密机床上各种形状的机械零件，其加工精度要求很高，单单根据作图所得到的形状进行加工往往不能适应要求，需要用数字精确给出加工点的位置．这就要求我们提供新的处理几何问题的方法．

解析几何正是适应生产斗争和科学实验的要求而发展起来的，它的特点是通过坐标法，使点与坐标对应起来，使曲线和方程对应起来，从而借助于代数方法来研究几何问题．从本章开始的四章是解析几何的主要内容，其中将研究直线、圆、抛物线、椭圆、双曲线、螺线、渐开线和摆线等几类重要曲线的方程与性质，着重解决这样两个问题：如何由曲线建立方程以及如何由方程讨论有关曲线的几何性质．

第一节　点和坐标

在本书代数部分第五章中，我们学过平面直角坐标系．通过坐标法使平面上的点与数对应，是实现"形"和"数"的转化的一种手段，这种转化为用代数方法研究几何问题创造了条件．因此，在学习解析几何之前，我们先复习坐标的概念，并讨论几个简单问题．

平面上取两根互相垂直的、长度单位相同的数轴，各以它们的交点为原点，这样就构成了一个平面直角坐标系．这两根数轴分别称为 x 轴与 y 轴，统称为坐标轴，数轴的交点 O 称为坐标原点，坐标系记为 Oxy．建立了坐标系之后，平面上每一点 P 对应着唯一的一对有顺序的实数 (x, y)；反过来，每一对有顺序的实数 (x, y) 也对应着平面上唯一的一点 P．(x, y) 称为点 P 在坐标系 Oxy 中的坐标（图 5-1）．

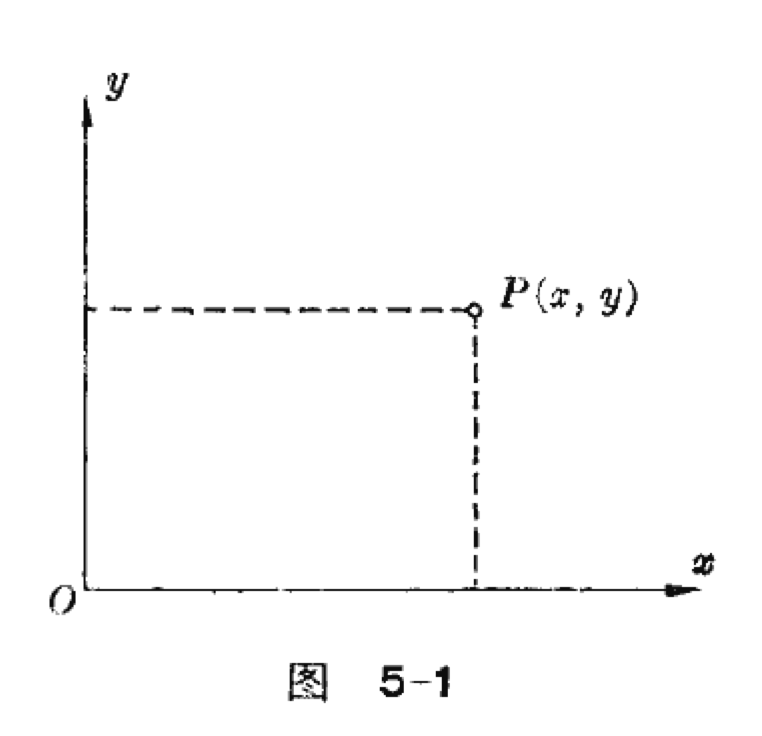


图 5-1

坐标的概念在生产上有直接的应用．例如坐标镗床，它的纵横两根导轨上有精密的刻度（相当于两坐标轴），要加工的孔的位置用坐标给出，产品可以达到很高的精度．

一、距离公式

设 $P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2)$ 是平面上两点，我们用坐标来表达它们之间的距离．

过 P_1、P_2 分别作 P_1M_1、P_2M_2 垂直于 x 轴，作 P_1N_1、

P_2N_2 垂直于 y 轴，延长 N_1P_1 交 P_2M_2 于 Q (图 5-2). 因为 P_1QP_2 是直角三角形，由勾股定理得到

$$P_1P_2=\sqrt{P_1Q^2+P_2Q^2},$$

而 $P_1Q=M_1M_2=|x_2-x_1|$, $P_2Q=N_2N_1=|y_2-y_1|$, 所以

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \quad (1)$$

式(1)称为平面直角坐标系下两点间的距离公式，是解析几何的一个基本公式.

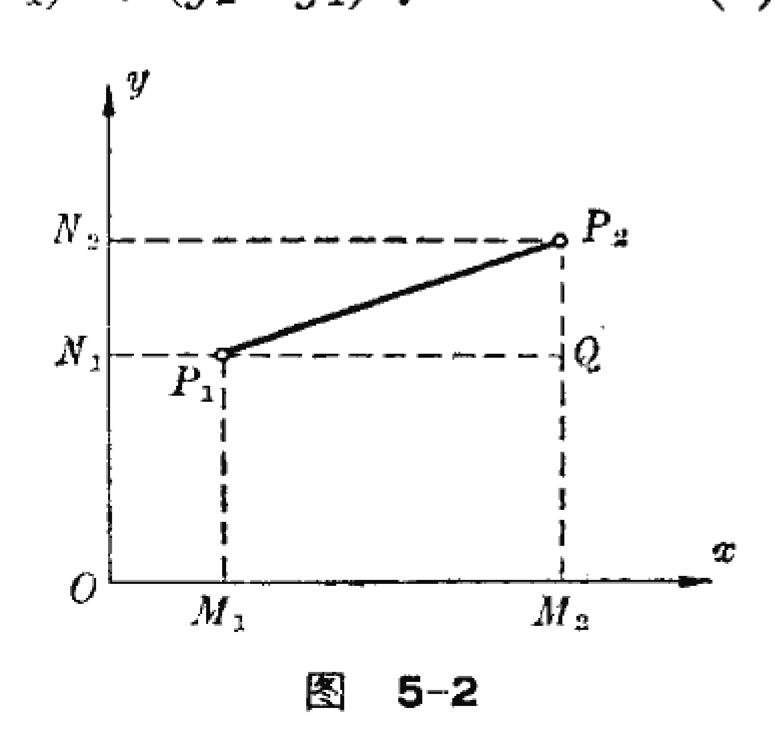


图 5-2

[例 1] 求 $P_1(-7,3)$ 与 $P_2(5,-2)$ 两点间的距离.

解：由式(1)，因 $x_2-x_1=12$, $y_2-y_1=-5$, 得

$P_1P_2=\sqrt{12^2+(-5)^2}=13$.

[例 2] 计算如图 5-3 所示（单位：毫米）的齿轮箱孔中心 P_1、P_2 和 P_3 两两之间的距离.

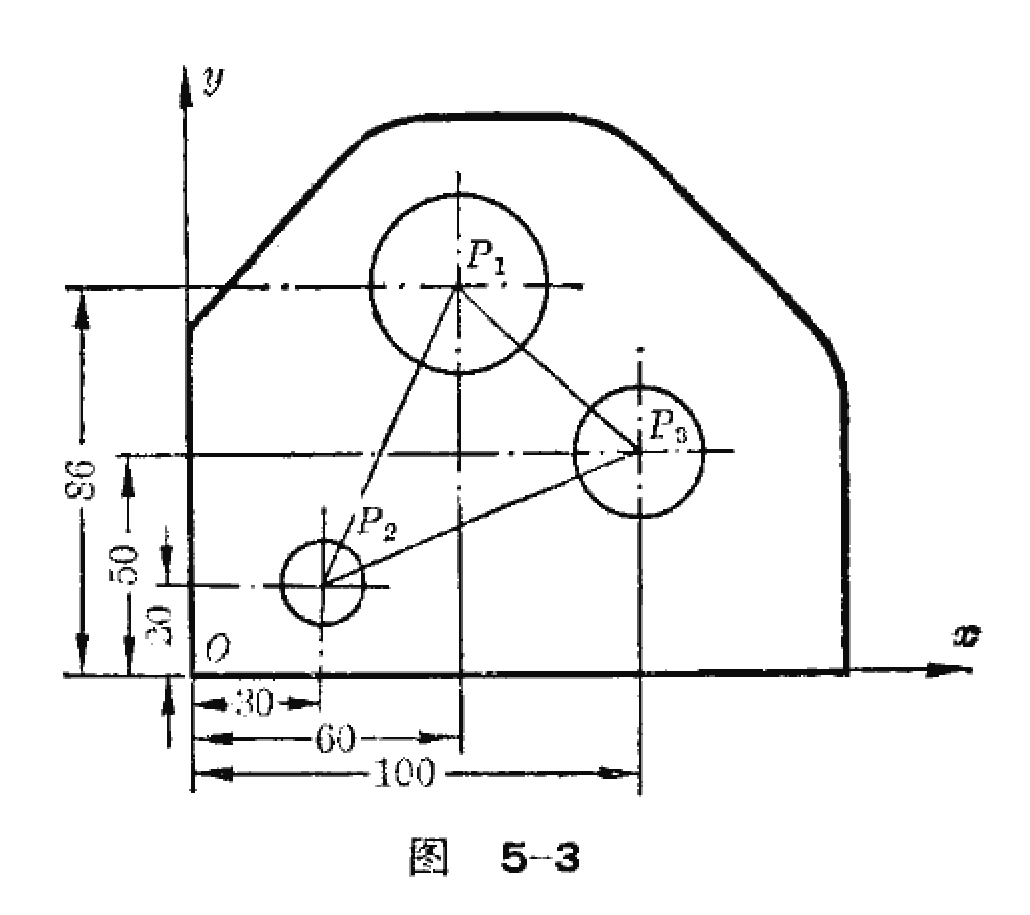


图 5-3

解：因为 P_1、P_2 和 P_3 的坐标分别为 (60, 86), (30,20) 和 (100, 50)，由式(1)得

$$P_1P_2=\sqrt{(30-60)^2+(20-86)^2}=72.5(\text{毫米}),$$
$$P_2P_3=\sqrt{(100-30)^2+(50-20)^2}=76.2(\text{毫米}),$$
$$P_1P_3=\sqrt{(100-60)^2+(50-86)^2}=53.8(\text{毫米}).$$

二、定比分点公式

设 $P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2)$ 是平面上两点，P 在线段 P_1P_2 上，如果它分 P_1P_2 成比值为 λ 的两段，即 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$，我们来求 P 点的坐标(x, y).

过 P_1、P_2 和 P 分别作平行于 y 轴的直线，与 x 轴交于 M_1、M_2 和 M(图 5-4)，由第二章关于平行线截得的线段成比例的结论，我们有

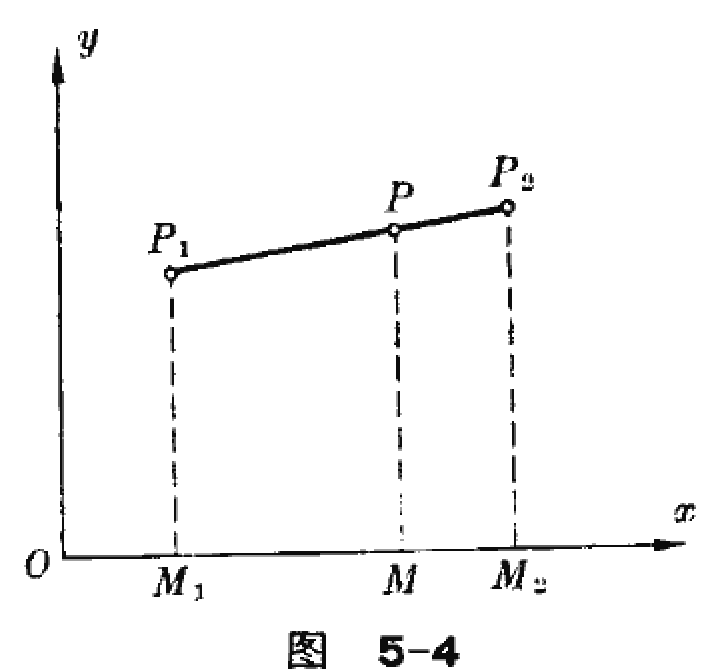


图 5-4

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{P_1P}{PP_2}.$$

当 $x_1<x_2$ 时，$M_1M=x-x_1$，$MM_2=x_2-x$，所以

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda,$$

由此解出

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

容易验证当 $x_1>x_2$ 时上式也成立. 同样可得

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

因此，把点 $P_1(x_1, y_1)$和 $P_2(x_2, y_2)$所连线段 P_1P_2 分成定比 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$ 的分点 P 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\quad (\lambda>0). \tag{2}$$

式(2)称为定比分点公式. 作为一个重要的特例, 当 $\lambda=1$ 时, P 是线段 P_1P_2 的中点, 我们得到下面的中点公式:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{3}$$

在物理学中, 我们知道一块质量均匀的三角形薄板的重心就是这三角形的三条中线的交点, 下面举一个求重心的例子.

[例 3] 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标 $A(-3, 2)$, $B(0, -4)$, $C(3, 4)$, 求它的重心 M 的坐标 (x, y).

解: 由三角形重心的性质, M 是分 BC 上中线 AD 为 $\frac{AM}{MD}=2$ 的分点(图 5-5). 由中点公式(3), D 的坐标为

$$x_0=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2},\quad y_0=\frac{-4+4}{2}=0,$$

再由定比分点公式(2), 得 M 点的坐标为

$$x=\frac{-3+2\cdot\frac{3}{2}}{1+2}=0,$$

$$y=\frac{2+0}{1+2}=\frac{2}{3}.$$

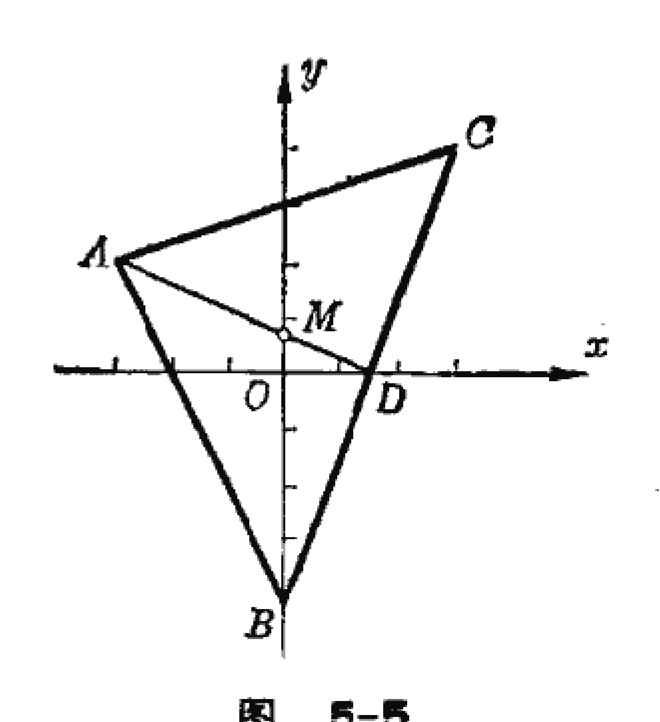


图 5-5

在一般情况, 以 $A_1(x_1, y_1)$、$A_2(x_2, y_2)$ 和 $A_3(x_3, y_3)$ 为顶点的 $\triangle A_1A_2A_3$, 它的重心的坐标为

$$x=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),\quad y=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3).$$

作为练习, 这个结果留给读者自己推导.

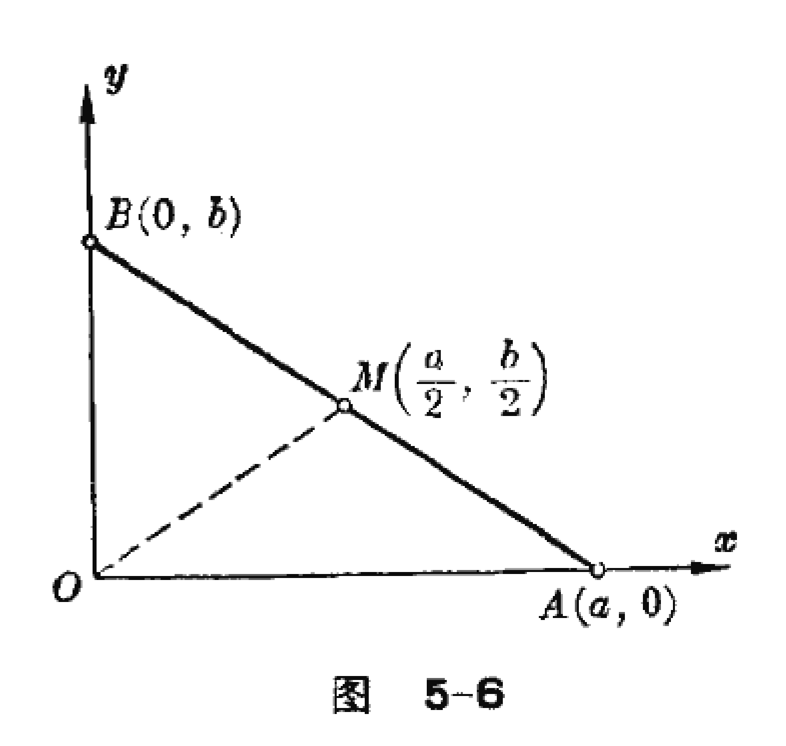


图 5-6

[例 4] 证明直角三角形斜边中点到三个顶点的距离相等.

证明：取坐标系如图5-6，A 和 B 的坐标分别为 $(a, 0)$ 和$(0, b)$，AB 边上中点 M 的坐标则为 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$，由距离公式(1)，得到

$$AM=\sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+\left(0-\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2},$$

$$BM=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(\frac{b}{2}-b\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2},$$

$$OM=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2},$$

所以 $AM=BM=OM$.

值得指出，象上面这样取坐标系，使直角三角形的直角边在坐标轴上，A、B、O、M 各点的坐标就很简单，便于运算.这说明，在解题时选取适当的坐标系往往可以大大简化证明或运算的过程.

三、坐标轴的平移　移轴公式

一点的坐标是对一定的坐标系来说的，同一个点，在不同

坐标系中就有不同的坐标．在很多问题中，为了处理的方便，往往需要从一个坐标系转换到另一个坐标系．下面我们就最简单的情况，导出同一点在两个不同坐标系中的坐标之间的关系．

设 Oxy 与 $O'x'y'$ 是两个不同的坐标系，它们的坐标轴分别平行，即 x 轴平行于 x' 轴，y 轴平行于 y' 轴，而且它们的长度单位都相同．我们可以把一个坐标系看作是由另一个坐标系经过平行移动而得到的，这种坐标系的变换称为坐标轴的平移或移轴．为了确定移轴后坐标系的位置，只要给出移轴后的坐标原点在原来坐标系中的坐标就可以了．

设 O' 在 Oxy 中的坐标为 (a, b)，现在要问：平面上任一点 P 在 $O'x'y'$ 中的坐标 (x', y') 和在 Oxy 中的坐标 (x, y) 之间有什么关系？从图 5-7 容易看出

$$x=x'+a, \quad y=y'+b, \tag{4}$$

或

$$x'=x-a, \quad y'=y-b. \tag{5}$$

式(4)与式(5)均称为移轴公式，它给出了坐标轴平移前后同一点坐标之间的关系．

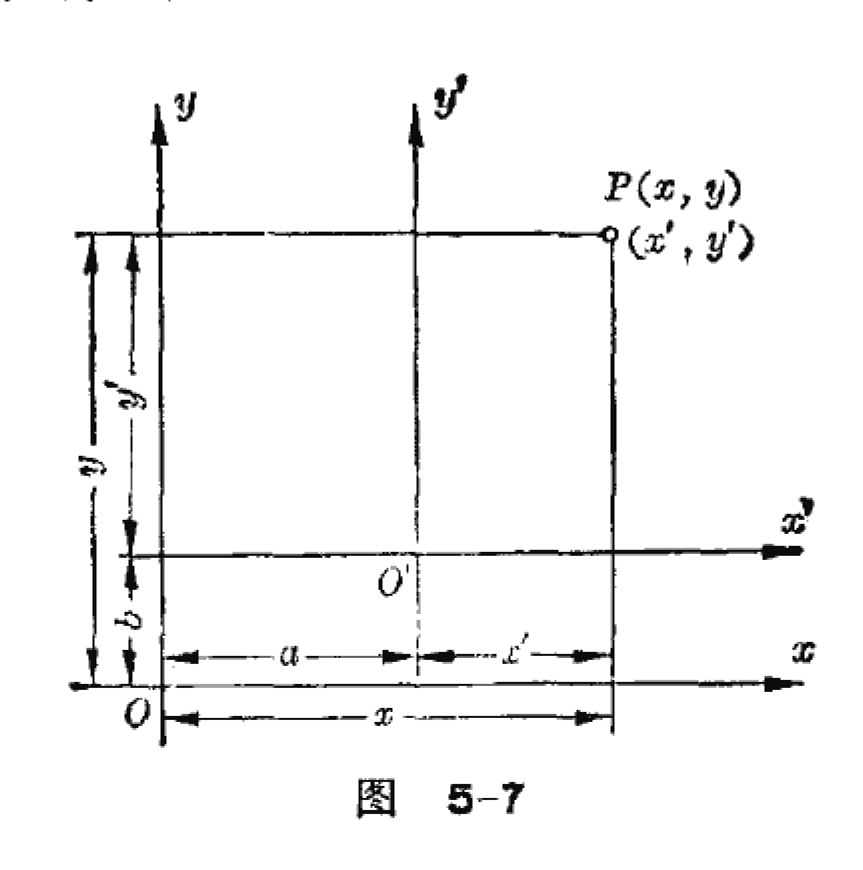


图 5-7

[例 5]　平移坐标系 Oxy, 把原点移到 $O'(2, -1)$. 设 A 点在 Oxy 中的坐标为 $(3, 0)$, 求它在 $O'x'y'$ 中的坐标 (x', y').

解：由移轴公式(5),

$$x'=x-a=3-2=1, \quad y'=y-b=0+1=1,$$

即所求坐标为 $(1, 1)$.

[例 6]　对图 5-8 所示的零件，要求在距两边 20 毫米和 30 毫米处加工一个孔 A. 在加工时，把零件夹在坐标镗床上，调整其两边使分别与工作台上两条刻度线 Ox 和 Oy 平行. 平移工作台，使镗刀对准零件两边的交点 O', 从刻度尺读出 O' 的横坐标和纵坐标分别为 120 毫米和 180 毫米，求镗孔 A 时两条刻度尺上的读数.

解：沿零件两边选取坐标系 $O'x'y'$, 孔 A 中心在这个坐标系中的坐标为

$$x'=30, \quad y'=20.$$

O' 在坐标系 Oxy 中的坐标为 $(120, 180)$. 由移轴公式

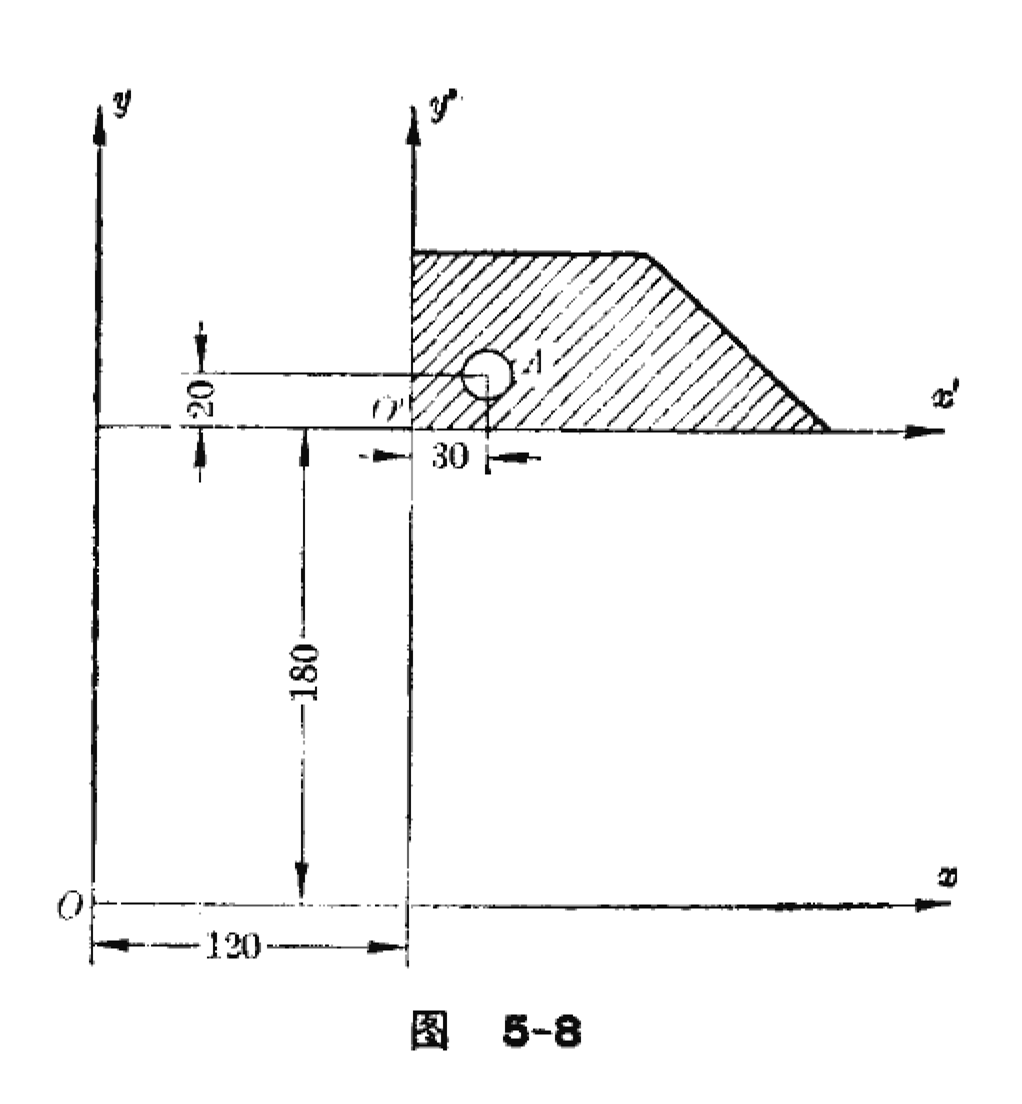


图　5-8

(4)，孔 A 中心在坐标系 Oxy 中的坐标为

$$x=x'+a=30+120=150,$$
$$y=y'+b=20+180=200,$$

即孔 A 中心在 Oxy 中的坐标为 (150, 200). 要使镗刀对准孔 A，两条刻度尺上的读数应分别是 150 和 200 毫米.

小　结

1. 平面直角坐标系是由两根互相垂直的、以交点为公共原点并且长度单位相同的数轴构成的. 建立了坐标系之后，平面上的点就可以用一对有顺序的实数 (x, y) 来表示；反之，一对有顺序的实数 (x, y) 就对应于平面上一点. (x, y) 称为点的坐标.

2. 设 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 是两已知点：

(1) 两点间距离公式：

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

(2) 分线段 P_1P_2 成定比 λ 的分点坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \quad (\lambda>0).$$

特别地，线段 P_1P_2 中点的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

3. 只改变坐标原点位置而不改变坐标轴的方向和长度单位的坐标系的变换称为移轴变换.

移轴公式为

$$x=x'+a, \quad y=y'+b$$

或

$$x'=x-a, \quad y'=y-b,$$

其中(x, y)和(x', y')分别是移轴前、后平面上同一点的坐标，(a, b)是移轴后的原点在原来坐标系中的坐标.

习　题

1. 在直角坐标系中画出下列各点：

$A(2, 7)$；　　$B(3, 0)$；　　$C(1, -1)$；

$D(0, -5)$；　　$E(-1, 2)$；　　$F(-4, -3)$.

2. 求下面两点之间的距离：

(1) $(2, 1)$和$(5, 1)$；　　(2) $(6, 0)$和$(0, 5)$；

(3) $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$和$\left(-8\frac{1}{2}, -3\right)$；　(4) $(-4, 3)$和$(2, -5)$.

3. 已知一点C到原点和点$(25, 0)$的距离分别为20和15，求C点的坐标.

4. 已知$\triangle ABC$三顶点$A(-3, 2)$、$B(0, -4)$和$C(3, 4)$，

(1) 求各边中点的坐标；

(2) 证明中位线的长度等于相应底边长度的一半.

5. 求质量均匀的三角形薄板的重心的坐标，已知它的顶点为

(1) $A(-4, 3)$，$B(2, -5)$，$C(0, -6)$；

(2) $A(-6, 8)$，$B(6, -8)$，$C(8, 6)$.

6. 点$C(0, 2)$以定比$\lambda=\frac{1}{5}$分$A(-2, 1)$和B两点所连线段，求B点的坐标.

7. 用解析法证明：

(1) 矩形的两条对角线长度相等；

(2) 梯形中位线之长等于上下底之和的一半；

(3) 设D是$\triangle ABC$的AB边上的中点，证明

$$AC^2+BC^2=2(AD^2+CD^2).$$

(提示：取直角坐标系，使D为原点，AB在x轴上.)

8. 坐标系$O'x'y'$是由坐标系Oxy移轴得到的，O'在Oxy中的坐标为$(-1, 2)$，点M_1和M_2在Oxy中的坐标分别为$(3, -1)$和$(0, -5)$，求M_1和M_2在$O'x'y'$中的坐标.

第二节 曲线和方程

前面说过，坐标法是研究曲线的一种代数方法，它使曲线和方程联系起来，从而可以通过对方程的研究来了解曲线的性质．本节首先通过简单的例子阐明曲线方程的概念，然后讨论由曲线求方程和由方程作曲线的问题，最后用代数方法处理与圆有关的一些几何问题．

一、曲线和方程

在第二章中我们已学过轨迹的概念，知道线段的垂直平分线是到该线段两端点距离相等的动点的轨迹，圆是到一定点(圆心)的距离保持定值(半径之长)的动点的轨迹．解析几何中所研究的一些简单而重要的曲线都可以看作是按一定规则(或几何条件)运动的点的轨迹．这规则(条件)把曲线上的一切点和不在曲线上的一切点区别开来，从而完整地刻画出这曲线的特征．

在本书代数部分第七章中我们已经学过画函数图形的方法，并且知道，一次函数的图形是直线，二次函数的图形是抛物线等等，现在就要反过来问，一条曲线是否可以用一个关于 x, y 的方程来表示？

为了回答这个问题，我们先来看一个简单的例子．

考虑平面上圆心在原点，半径为 r 的圆(图 5-9)．因为圆是到定点 O 的距离为定值 r

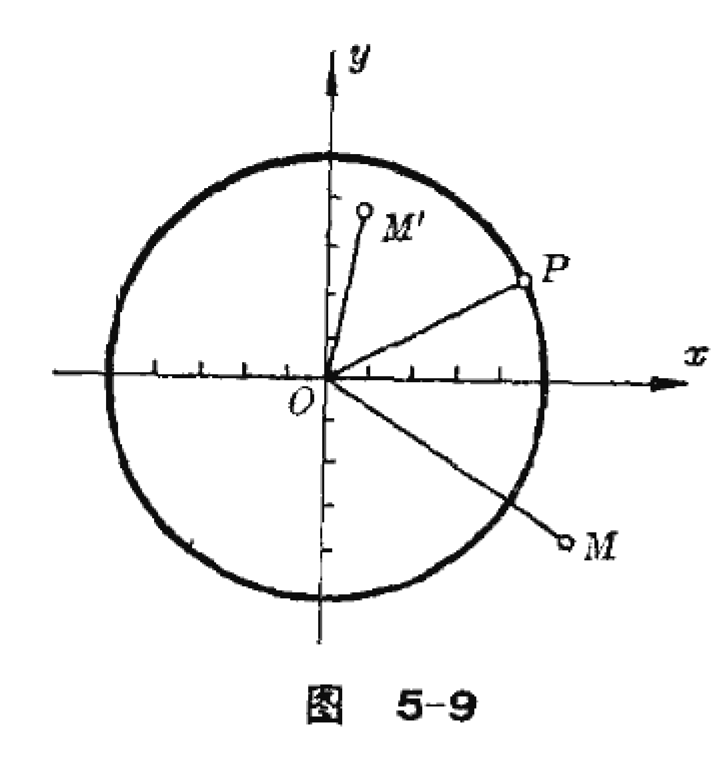


图 5-9

的动点 P 的轨迹，所以，动点运动的规则是 $OP=r$. 设动点 P 的坐标为 (x, y)，则 (x, y) 就应适合这个规则. 由距离公式得 $OP=\sqrt{x^2+y^2}$，由此

$$\sqrt{x^2+y^2}=r,$$

两边平方得

$$x^2+y^2=r^2.$$

这就是圆上任意点的坐标所满足的方程.

那么，是不是可以用方程 $x^2+y^2=r^2$ 来表示圆呢？要肯定这一点，根据轨迹的概念，仅仅知道圆上点的坐标满足该方程是不够的，还必须说明只有圆上点的坐标才满足这个方程，或者说，应说明凡是不在圆上的点，其坐标必定不满足这个方程. 事实上，对圆外的点 $M(x, y)$，$OM>r$，因此

$$x^2+y^2>r^2;$$

类似地，对圆内的点 $M'(x, y)$，有

$$x^2+y^2<r^2.$$

也就是说，如果点不在圆上，则其坐标必定不满足方程 $x^2+y^2=r^2$，所以我们可以用 $x^2+y^2=r^2$ 表示圆，称它为圆的方程.

“**普遍性即存在于特殊性之中**”，由这个例子，我们可概括出曲线方程的一般概念.

如果曲线和方程有下述关系：(1) 曲线上的点的坐标都满足这方程；(2) 满足方程的点都在曲线上，或者不在曲线上的点的坐标都不满足这方程，则称这方程为这条曲线的方程，而称这曲线为方程所表示的曲线.

我们再举一个例子.

［例 1］ 已知平面上两点 $P(4, 0)$ 与 $Q(0, 2)$，求线段 PQ 的垂直平分线 l 的方程.

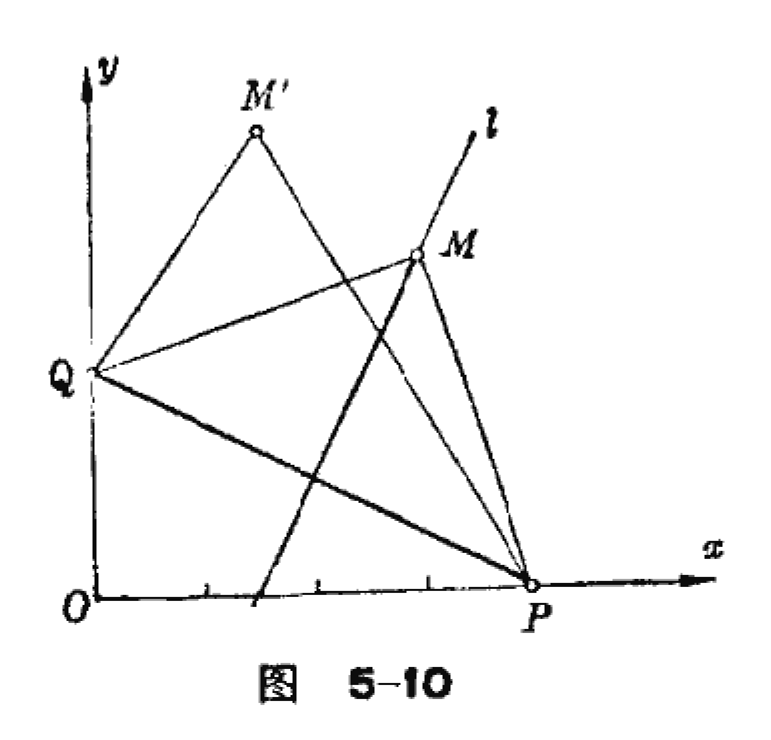


图 5-10

解：垂直平分线 l 是到线段两端点 P 和 Q 距离相等的动点 M 的轨迹，动点运动的规则是 $MP=MQ$. 设 M 的坐标为 (x, y)，用坐标表示上述运动规则就得到

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2},$$

两边平方并化简得

$$2x-y-3=0.$$

反过来，对于不在 l 上的点 $M'(x', y')$ 有 $M'P\neq M'Q$，即

$$\sqrt{(x'-4)^2+y'^2}\neq\sqrt{x'^2+(y'-2)^2},$$

它们都是正数，两边平方化简得

$$2x'-y'-3\neq 0,$$

即 M' 的坐标不满足方程．所以，$2x-y-3=0$ 是垂直平分线 l 的方程．

从上面的例子可以看到，由曲线求方程的主要步骤是：

(1) 根据所给条件，选择适当的坐标系；

(2) 用等量关系列出动点运动的规则；

(3) 用动点坐标 (x, y) 表示上面的等量关系，化简得到含 x 和 y 的方程，就是所求曲线的方程．

由曲线求方程，这只是问题的一个方面．另一方面是知道了曲线的方程后，要画出这条曲线．

例如，作方程 $y=4$ 所表示的曲线 l. 根据曲线方程的涵义：对 l 上任意点 (x, y) 有 $y=4$，所以它在上半平面，且到 x 轴的距离是 4，显然它在一条过 $M_0(0, 4)$ 而平行于 x 轴的直线上（图 5-11）. 反过来，容易验证，这直线上的任意点 $M(x, y)$，其坐标也都满足 $y=4$，所以这直线正是 $y=4$ 所表示的曲线 l.

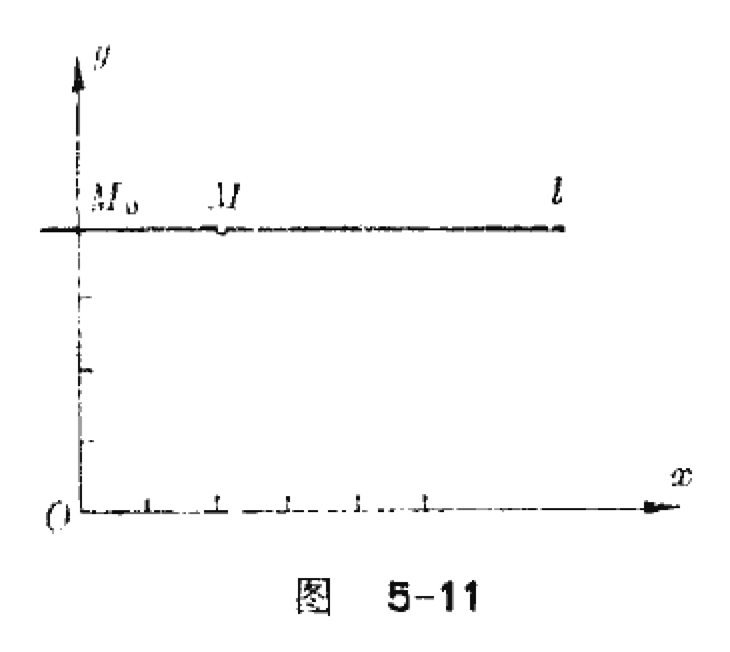


图 5-11

一般地，平行于 x 轴的直线，其方程为 $y=b$；平行于 y 轴的直线，其方程为 $x=a$.

对于一般的曲线方程，可以采用描点法作出曲线的图形.

二、圆的方程

上面我们知道了圆心在原点、半径为 r 的圆的方程为 $x^2+y^2=r^2$，用同样方法可以得到圆心在任意点的圆的方程.

设圆心在 $C(a, b)$，半径为 r，则对圆上任意点 $P(x, y)$ 有 $PC=r$（图 5-12），由

$$PC=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

得

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \quad (6)$$

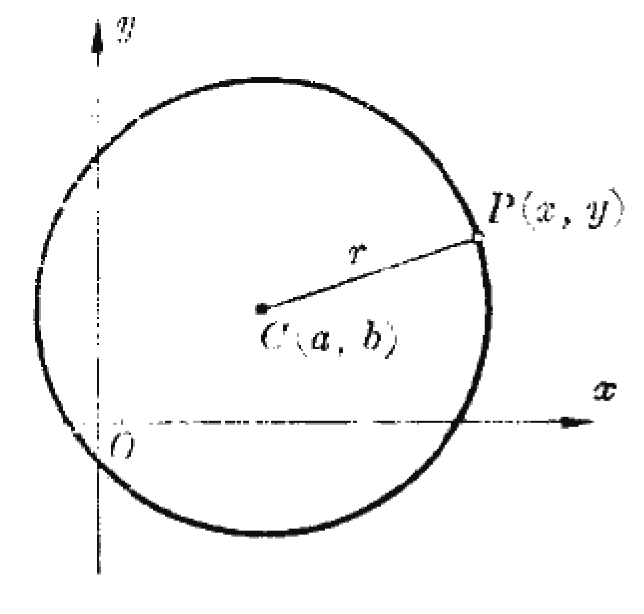


图 5-12

容易验证，这方程为圆上点的坐标所满足，而不在圆上的点的坐标则不满足. 式(6)称为圆的标准方程.

当圆心取为原点时，$a=b=0$，圆的方程变成

$$x^2+y^2=r^2. \quad (6')$$

这与前面的结果一致．这说明选择适当的坐标系可以使曲线的方程简化．

[例 2] 求圆心为(4, 3)、半径为 5 的圆的方程．

解：由式(6)，所求方程为

$$(x-4)^2+(y-3)^2=5^2.$$

式(6)是一个关于 x 和 y 的二次方程，我们来讨论它的特点．展开并按降幂排列，得

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0,$$

可见任何一个圆的方程都可以写成下面的形式：

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0. \tag{7}$$

把它和一般形式的二元二次方程

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

比较，可以看到它有这样的特点：(1) x^2 项和 y^2 项的系数相等且不为 0（在这里为 1）；(2) 没有交叉项 xy．

反过来，我们来证明，形如(7)的方程一般表示一个圆．

为此，将(7)的左端配方，得

$$x^2+2Dx+D^2+y^2+2Ey+E^2-D^2-E^2+F=0,$$

即

$$(x+D)^2+(y+E)^2=D^2+E^2-F.$$

与式(6)比较，可以知道，当 $D^2+E^2-F>0$ 时，式(7)表示一个以 $(-D, -E)$ 为圆心，$\sqrt{D^2+E^2-F}$ 为半径的圆；当 $D^2+E^2-F=0$ 时，式(7)表示一个点 $(-D, -E)$（半径为零的"圆"）；而当 $D^2+E^2-F<0$ 时，式(7)不表示任何图形．

式(6)是圆的标准方程，式(7)称为圆的一般方程．标准方程的优点在于它明确地指出了圆心和半径，而一般方程突出了方程形式上的特点，便于从一般二元二次方程所表示的曲线中把圆区别出来．

[例 3] 说明方程 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 表示圆，求出它的圆心和半径.

解：对比方程(7)，这里 $D=-1$，$E=2$，$F=-4$，而 $D^2+E^2-F=9>0$，所以所给方程是一个圆，圆心为$(1, -2)$，半径为$\sqrt{D^2+E^2-F}=3$.

因为圆是最简单的曲线，工厂里常用一段一段的圆弧来代替比较复杂的、由理论推导所得的曲线，这种圆弧称为代用圆弧. 如果选得适当，误差可以很小. 一般，根据理论曲线的图形特征，把它分成几段，在每一段中取理论曲线的两端点 M_0、M_2 和中间一点 M_1，以过这三点的圆弧为代用圆弧(图 5-13). 这一圆弧可用几何作图画出，为提高精度，常采用数值计算的方法，并为计算方便，取 M_0 为坐标原点.

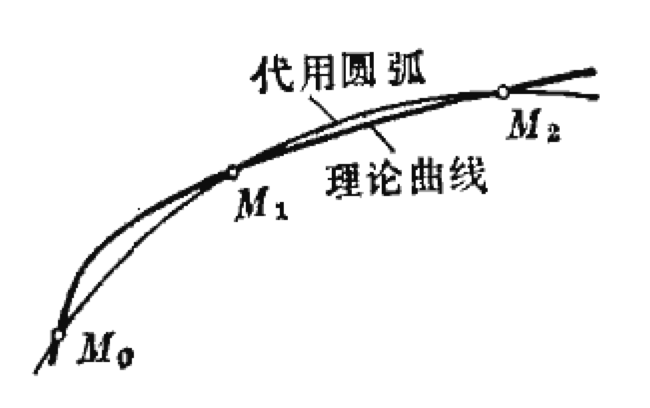


图 5-13

[例 4] 求过三点 $O(0, 0)$，$M_1(1, 1)$，$M_2(4, 2)$ 的圆的方程，并求此圆的半径和圆心坐标.

解：因为圆心和半径都是待求的，所以用圆的一般方程，由圆上三个已知点的坐标来定出一般方程中的未知系数.

设所求圆的方程为

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

因为 O，M_1，M_2 在圆上，把它们的坐标依次代入上述方程，得到 D、E、F 的三元一次方程组

$$F=0,$$
$$2D+2E+F+2=0,$$
$$8D+4E+F+20=0,$$

解得 $F=0$，$D=-4$，$E=3$. 于是所求圆的方程为

$$x^2+y^2-8x+6y=0.$$

而圆心为$(4,\ -3)$，半径为$\sqrt{D^2+E^2-F}=5$.

这种先设曲线的一般方程(系数未知)，然后由所给条件定出系数的求解方法叫做待定系数法，是经常用到的一种方法.

[例 5] 已知齿轮箱上两个齿轮的中心分别是$O(0,0)$，$A(70,70)$，第三个齿轮的中心B到O、A的距离都是50，求B的坐标.

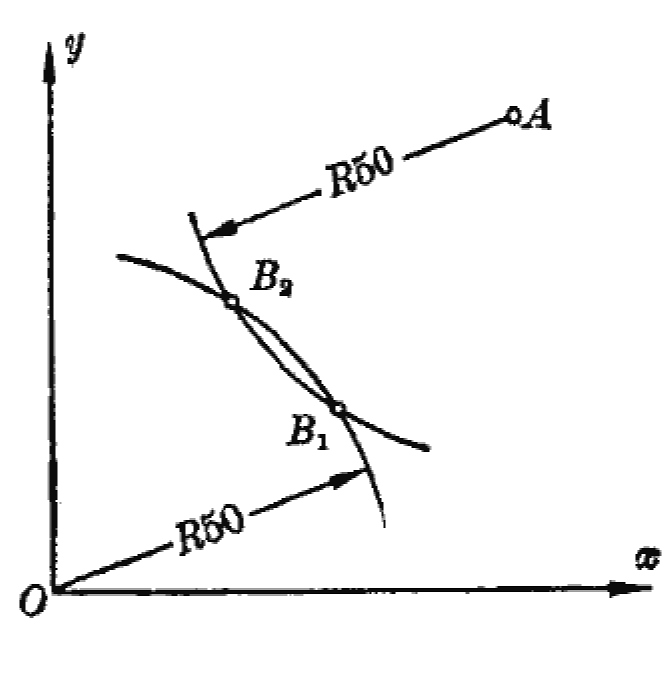


图 5-14

解：由$BO=50$知B点在圆心为O、半径为50的圆周上(图5-14)，所以，B的坐标满足方程

$$x^2+y^2=2500.$$

同理，B点又在圆心为A、半径为50的圆周上，它的坐标应满足方程

$$(x-70)^2+(y-70)^2=2500.$$

所以，B的坐标必定是上面两方程所组成的方程组的解，求解得

$$\begin{cases}x_1=40,\\ y_1=30,\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=30,\\ y_2=40,\end{cases}$$

即点$B_1(40,\ 30)$与$B_2(30,\ 40)$都可以是第三个齿轮中心的位置.

在上述例子中，B_1和B_2实际上是两个圆的交点，我们是通过解相应的方程组来求得交点的坐标的. 一般地，我们有这样的结论：

两条曲线交点的坐标一定是这两条曲线的方程所组成的方程组的实数解；反之，曲线方程组的实数解也一定是两曲线

交点的坐标.

因此,我们可以用解方程组的办法求出曲线交点的坐标.反过来,也可以用作图的方法求方程组的实数解.

[例 6] 某人民公社要建造一座跨度 $AB=8$ 米,矢高 $f=\frac{8}{3}$ 米的圆弧拱桥(图 5-15),试求在等分点 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_7$ 处的撑架 $P_1Q_1, P_2Q_2, \cdots, P_7Q_7$ 之长.

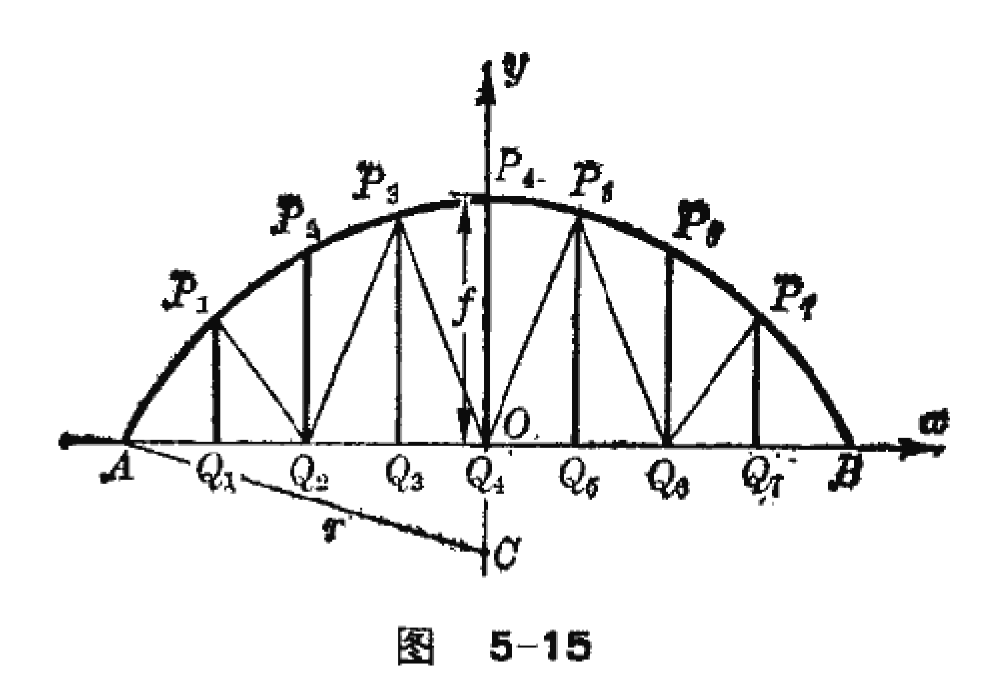


图 5-15

解: 取坐标系如图 5-15, 圆心 C 在 y 轴上, 其坐标为 $(0, b)$. 设半径为 r, 则圆的方程为

$$x^2+(y-b)^2=r^2.$$

因为 $A(-4, 0)$, $P_4\left(0, \frac{8}{3}\right)$ 在圆上,所以它们的坐标满足上述方程,即

$$4^2+b^2=r^2,$$

$$\left(\frac{8}{3}-b\right)^2=r^2.$$

解得 $b=-\frac{5}{3}$, $r^2=\frac{169}{9}$. 因此这圆的方程为

$$x^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2=\frac{169}{9}.$$

将 P_5 的横坐标 $x=1$ 代入方程, 解得

$$y=\frac{4}{3}\sqrt{10}-\frac{5}{3}\approx 2.55,$$

所以撑架 P_5Q_5 长 2.55 米．同样可求出其他撑架的长，由读者自己完成．

小　结

1．在给定的直角坐标系中，如果曲线和方程有这样的关系：曲线上的点的坐标满足这方程，而不在曲线上的点的坐标都不满足这方程，则称这方程为这条曲线的方程，称这曲线为这方程所表示的曲线．

2．两条曲线交点的坐标是这两曲线的方程所组成的方程组的实数解，因此可以用解方程组的办法求曲线交点的坐标．

3．圆的标准方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

其中 (a, b) 是圆心，r 是半径．

圆的一般方程为

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

它的圆心是 $(-D, -E)$，半径是 $\sqrt{D^2+E^2-F}$．

习　题

1．说明 $x^2+y^2=16$ 是以坐标原点为圆心，4 为半径的圆的方程．

2．说明 $y=\sqrt{3}x$ 是通过坐标原点且与 x 轴夹角为 $60°$ 的直线的方程．

3．设 l 是与两条坐标轴距离相等的点的轨迹，求 l 的方程．

4．动点运动时，它与 y 轴的距离始终和它与点 $(3, 0)$ 的距离相等，求此动点轨迹的方程．

5．已知点 $A(5, 2)$ 与 $B(-3, 5)$，求线段 AB 的垂直平分线的方程．

6. 求圆心在原点、半径为 5 的圆的方程，判定下列各点中哪些在圆上，哪些在圆外，哪些在圆内？

$(2, 3)$， $(0, 5)$， $(-3, -4)$， $(-3, -2)$， $(4, -4)$.

7. 已知下述条件，求圆的方程：

(1) 圆心 $(2, 3)$，半径 $r=3$；

(2) 圆心 $(3, 5)$，且与 y 轴相切；

(3) 圆心 $(-2, 4)$，且与直线 $x=1$ 相切.

8. 试求下列各圆的圆心和半径：

(1) $(x-6)^2+(y+2)^2=144$;

(2) $x^2+y^2-4x-2y-4=0$;

(3) $2x^2+2y^2-2x-2y-1=0$.

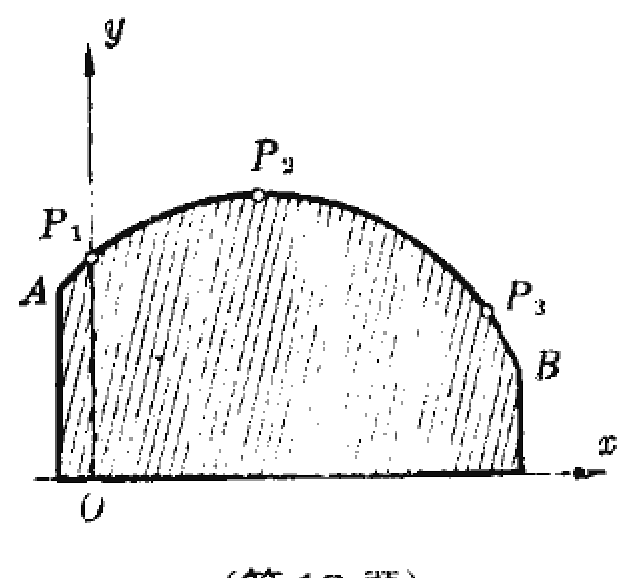
9. 已知圆心为 $(1, 2)$，点 $(0, 2+2\sqrt{2})$ 在圆上，求圆的方程.

10. 设动点 M 到两定点 M_1 和 M_2 的距离之比等于常数 k: $\frac{MM_2}{MM_1}=k$ $(k\neq 1)$，求动点轨迹的方程. 这是什么曲线？（可选取坐标系使 M_1 和 M_2 都在 x 轴上.）

11. 两定点之间的距离为 6，动点 M 到这两定点的距离的平方之和为 26，求 M 的轨迹（选坐标系如上题）.

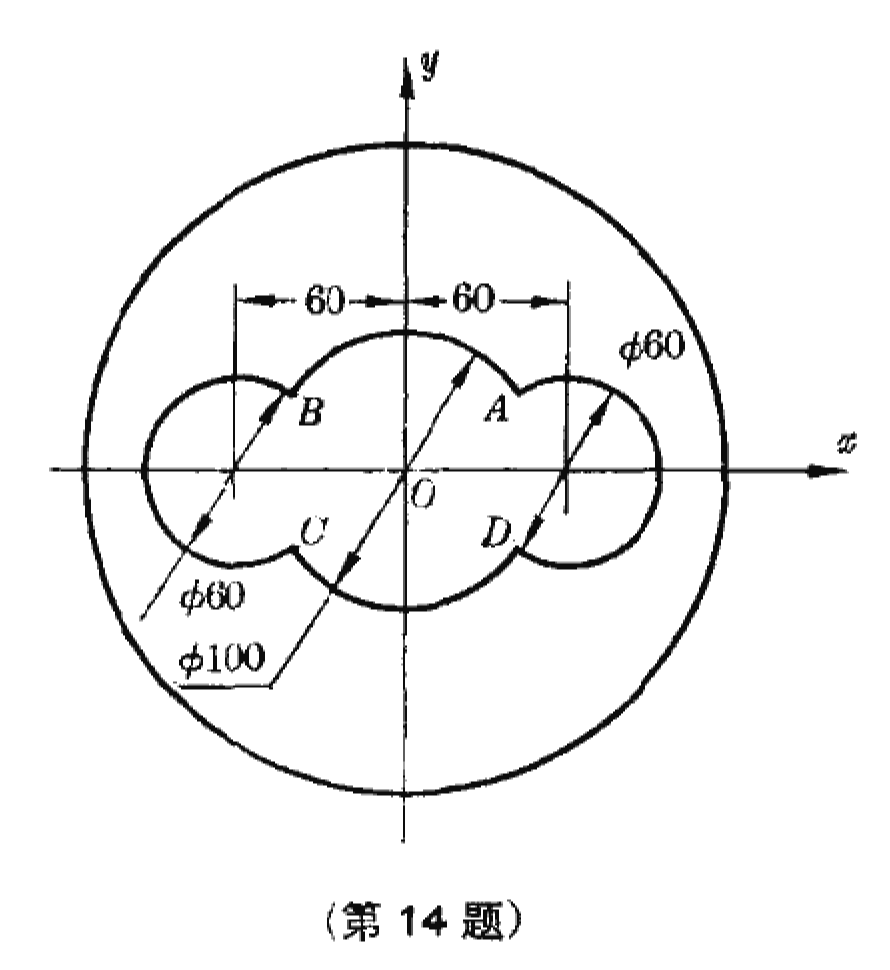
12. 用解析几何的方法证明：圆内垂直于弦的半径平分此弦（选坐标系使圆心在原点，并使弦平行于任一坐标轴）.

13. 某零件的剖面形状如图，$\overset{\frown}{AB}$ 为圆弧，测得圆弧上三点的坐标为 $P_1(0, 40)$、$P_2(30, 50)$ 和 $P_3(70, 30)$，试求圆心的坐标和半径之长.



（第 13 题）

14. 某零件如图,试根据图中尺寸计算交点 A、B、C 和 D 的坐标.



(第 14 题)

15. 已知下述条件,求圆的方程:

(1) 一直径的两端点为$(5, -7)$和$(-1, 1)$;

(2) 过$(9, 0)$且与 y 轴切于$(0, 3)$;

(3) 过三点$(0, 1)$, $(0, 6)$和$(3, 0)$.

第三节 直线的方程

本节将用解析几何方法讨论在生产实践中应用最广泛的直线. 首先根据几何条件建立直线的方程,然后由直线的方程讨论其几何位置,并揭示直线和一次方程的内在联系.

一、直线的方程

已知直线上一个点和它的方向,这直线就完全确定了.因此,在选定了坐标系之后,根据这几何条件,我们就可以建立直线的方程.

为了更确切地说明直线的方向,我们引进直线的倾角这

一概念．所谓直线的倾角，是指 x 轴（正向）沿逆时针方向旋转，第一次与这直线重合时所转过的角度，记为 α，显然 $0\leqslant\alpha<\pi$．当直线与 x 轴平行时，规定 $\alpha=0$．倾角的正切叫做这直线的斜率，记为 k，即 $k=\operatorname{tg}\alpha$，它表示直线对 x 轴的倾斜程度，常用来表示直线的方向．当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，即直线与 x 轴垂直时，它的斜率不存在．

设直线 l 的斜率为 k，过点 $M_0(x_0, y_0)$，我们来导出它的方程．

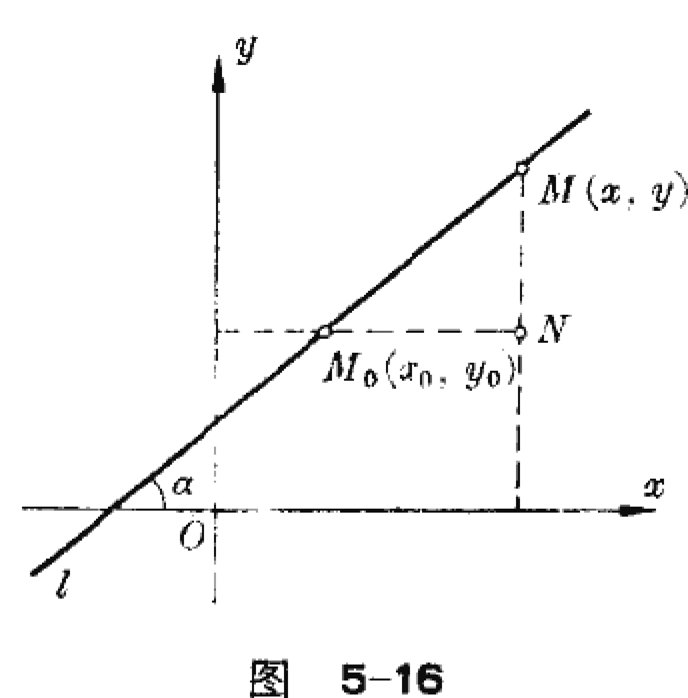


图 5-16

在图 5-16 中（这里讨论的是 $k\geqslant0$ 即 $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ 的情况，对于 $k<0$ 的情况，可同样讨论），设 $M(x, y)$ 是 l 上任意一点．过 M_0 作平行于 x 轴的直线，过 M 作平行于 y 轴的直线，它们相交于 N．由于直角三角形 M_0NM 中 $\angle MM_0N=\alpha$，可知 M 点适合条件

$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{NM}{M_0N}.$$

由于

$$\frac{NM}{M_0N}=\frac{y-y_0}{x-x_0},$$

所以

$$k=\frac{y-y_0}{x-x_0},$$

即点 $M(x, y)$ 的坐标必须满足方程

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{8}$$

反之，凡是满足这方程的点 (x, y) 都在直线 l 上，因为点

(x, y) 与点 $M_0(x_0, y_0)$ 的连线的斜率为 k. 因此式(8)是直线 l 的方程.

式(8)称为直线的点斜式方程. 当倾角 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, 即直线垂直于 x 轴时, 斜率 k 不存在, 但我们知道, 这时直线的方程取 $x=a$ 的形式. 由此可知, 直线的方程是 x, y 的一次方程.

[例 1] 已知直线 l 过 $M_0(3, 5)$, 斜率 $k=\frac{1}{3}$, 求 l 的方程.

解: 由式(8), l 的方程是

$$y-5=\frac{1}{3}(x-3),$$

化简得

$$y=\frac{1}{3}x+4.$$

作为一种特殊情况, 当 M_0 是 y 轴上一点 $(0, b)$ 时, 式(8)变为

$$y=kx+b. \tag{9}$$

式(9)称为直线的斜截式方程, b 称为直线在 y 轴上的截距, 简称纵截距, 它是直线与 y 轴交点的纵坐标.

上面例 1 中直线 l 的两个方程, 前一个是点斜式方程, 经化简后得到的是斜截式方程, 它的纵截距 $b=4$.

除了一个点和一个方向决定一条直线外, 两个点也唯一地决定一条直线. 现在我们来讨论通过两已知点的直线方程.

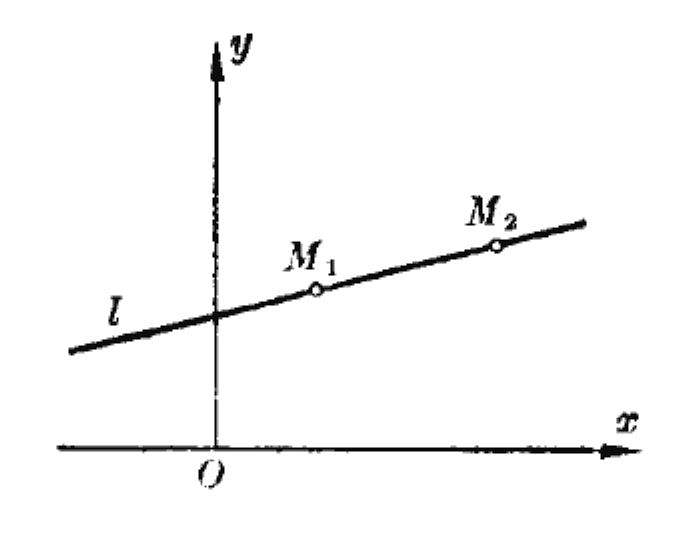


图 5-17

设已知两点为 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ (图 5-17). 当

$x_1=x_2$时，显然 l 垂直于 x 轴，它的方程是 $x=x_1$. 而当 $x_1\neq x_2$ 时，我们取一个已知点 $M_1(x_1, y_1)$，把 l 的方程写成点斜式 $y-y_1=k(x-x_1)$，其中 k 是待定常数. 再将点 M_2 的坐标 (x_2, y_2) 代入，得

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1),$$

即

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{10}$$

式(10)给出了过两已知点的直线的斜率. 因此，由两点 $M_1(x_1, y_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2)$决定的直线 l 的方程为

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1). \tag{11}$$

式(11)称为直线的两点式方程.

[例 2] 求过两点 $P(1, 2)$和 $Q(3, 5)$ 的直线 l 的方程.

解：由式(11)，l 的方程是

$$y-2=\frac{5-2}{3-1}(x-1),$$

化简得

$$3x-2y+1=0.$$

[例 3] 光线从点 $M(-3, 6)$ 射到点 $P(1, 0)$，被 x 轴(镜面)所反射(图 5-18)，求反射光线的方程.

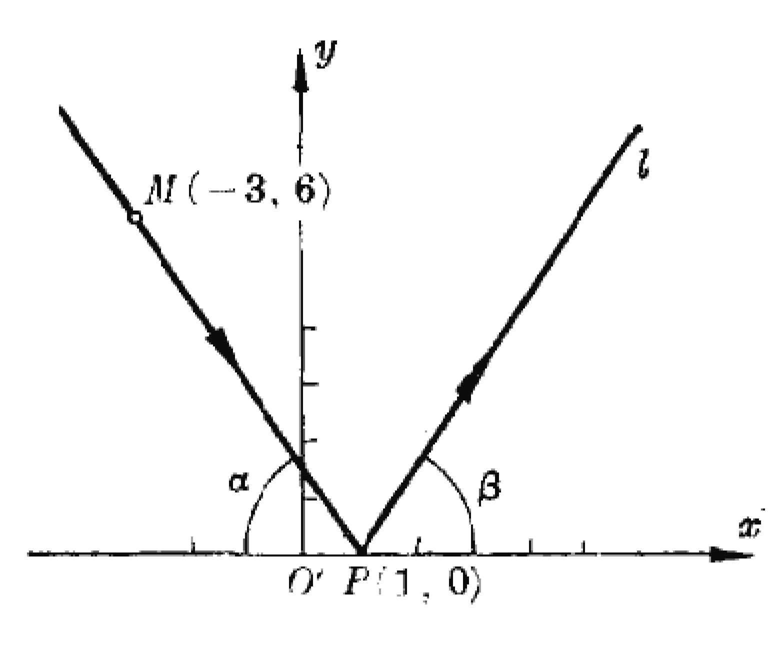


图 5-18

解：根据光的反射定律，$\angle\alpha=\angle\beta$，所以反射光线 l 的斜率为

$$k=\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha.$$

由式(10)可得过点 M 和 P 的直线(其倾角为 $\pi-\alpha$)的斜率为

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=\frac{6}{-3-1}=-\frac{3}{2},$$

于是

$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2},$$

所以 l 的方程为

$$y=\frac{3}{2}(x-1),$$

即

$$3x-2y-3=0.$$

二、一次方程与直线

由上面的讨论可知，不论直线在平面上的位置如何，它的方程都是 x 和 y 的一次方程. 反过来，一次方程的图形是否一定是直线呢?

x, y 的一次方程的一般形式为

$$Ax+By+C=0, \tag{12}$$

其中 A, B 不同时为 0.

当 $B\neq0$ 时，式(12)可化为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

与斜截式(9)比较，可知它正是斜率 $k=-\frac{A}{B}$、纵截距 $b=-\frac{C}{B}$ 的直线的方程. 特别，如 $A=0$，则 $y=-\frac{C}{B}$，它是一条过点

$\left(0,-\frac{C}{B}\right)$而平行于 x 轴的直线；

当 $B=0$ 时，因为 $A\neq0$，式(12)可化为

$$x=-\frac{C}{A},$$

它是一条过点 $\left(-\frac{C}{A},0\right)$ 而平行于 y 轴的直线.

总之，二元一次方程 $Ax+By+C=0$ 的图形是一条直线，所以方程(12)称为直线的一般方程，系数 A, B, C 有上面所说的几何意义.

综上所述可以得出结论：直线是二元一次方程的几何表示(即图形)，而**二元一次方程是直线的解析表示**(即直线的方程).

[例 4] 求直线 $x-2y+3=0$ 的斜率 k 和纵截距 b，并作出它的图形.

解：将方程变形为斜截式：

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2},$$

显然斜率 $k=\frac{1}{2}$，纵截距 $b=\frac{3}{2}$.

图 5-19

为了画出直线 l 的图形，只要任意确定 l 上两点就可以了. 现在已经知道 l 与 y 轴的交点 $P\left(0,\frac{3}{2}\right)$，所以需要再找一点，最方便的是求它与 x 轴的交点 Q，为此把 $y=0$ 代入方程得 $x=-3$，即 Q 的坐标为 $(-3,0)$ (图 5-19). 连接 P、Q 两点即得直线 l.

小 结

1. 直线方程有下列各种形式，其中点斜式是基本的：

(1) 点斜式　已知斜率 k 和直线上一点 (x_0, y_0)，直线方程为

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

(2) 斜截式　已知斜率 k 和纵截距 b，直线方程为

$$y=kx+b.$$

(3) 两点式　已知直线上两点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，直线方程为

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

或

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

(4) 一般式

$$Ax+By+C=0,$$

其中 A, B 不同时为 0.

2. 在平面直角坐标系中，直线的方程是二元一次方程；二元一次方程表示一条直线.

习　题

1. 已知下列条件，求直线的方程：

(1) 过点(3, 5)，斜率 $k=2$；

(2) 过点(−2, 3)，倾角 $\alpha=\frac{\pi}{6}$；

(3) 过点(0, 0)，倾角 $\alpha=\frac{\pi}{3}$；

(4) 斜率 $k=3$，纵截距 $b=5$；

(5) 斜率 $k=\frac{2}{3}$，纵截距 $b=-1$；

(6) 倾角 $\alpha=\frac{3}{4}\pi$，纵截距 $b=6$；

(7) 过两点(2, 1)和(7, 5)；

(8) 过两点$(2, -1)$和$(1, 3)$;

(9) 与 x 轴交于$(4, 0)$,与 y 轴交于$(0, 5)$;

(10) 与 x 轴交于$(-4, 0)$,斜率 $k=\frac{1}{2}$.

2. 写出下列直线的斜率和纵截距,并作出图形:

(1) $x=5y-2$; (2) $y=\frac{1}{4}x-1$;

(3) $3x-2y=0$; (4) $3x-2y-6=0$;

(5) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+1=0$.

3. 证明三点$(-2, 12)$、$(1, 3)$和$(4, -6)$在一直线上.

4. 已知下述条件,求直线 l 的斜率和它的方程:

(1) 过点$(3, 5)$,和直线 $y=2x-4$ 平行;

(2) 过点$(1, 2)$,和直线 $y=\sqrt{3}x$ 垂直;

(3) 过点$(2, -3)$,平行于两点 $A(1, 2)$、$B(-1, -5)$的连线.

5. 设直线 l 与 x 轴、y 轴分别交于点$(a, 0)$、$(0, b)$,证明 l 的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

(上式称为直线的截距式方程.)

6. 证明三角形的三条中线交于一点.

第四节　直线和直线、直线和圆的位置关系

在建立了直线和圆的方程之后,就可以用代数方法讨论直线和直线、直线和圆的相互位置关系了,这包括两直线的垂直和平行、圆与直线相切等几何问题.工厂中很多机械零件、建筑上很多结构形式都是由直线和圆弧组成的,因此这节的内容也有不少实际的应用.

两直线的交点,根据第二节的结论,可以通过解这两直线的方程所组成的方程组而求得.下面举一个例子.

[例1] 设直线 l_1 和 l_2 的方程分别为 $3x+5y-25=0$

和 $x-y-3=0$, 求它们交点的坐标.

解：两直线 l_1 和 l_2 的方程所组成的方程组为

$$3x+5y-25=0,$$
$$x-y-3=0,$$

解这个方程组得到

$$x=5, \quad y=2.$$

所以 l_1 和 l_2 的交点的坐标为(5, 2).

一、两直线的交角及平行、垂直条件

为便于研究，我们规定：直线 l_1 到直线 l_2 的交角是指 l_1 逆时针方向旋转，第一次与 l_2 重合时所转过的角度，显然，它在 0 到 π 之间.

设两直线的方程为

$$l_1: \ y=k_1x+b_1,$$
$$l_2: \ y=k_2x+b_2,$$

并设 α_1 和 α_2 分别为 l_1 和 l_2 的倾角，φ 为 l_1 到 l_2 的交角(图 5-20)，则

$$k_1=\operatorname{tg}\alpha_1, \quad k_2=\operatorname{tg}\alpha_2,$$
$$\varphi=\alpha_2-\alpha_1 \quad (\alpha_2\geqslant\alpha_1)$$

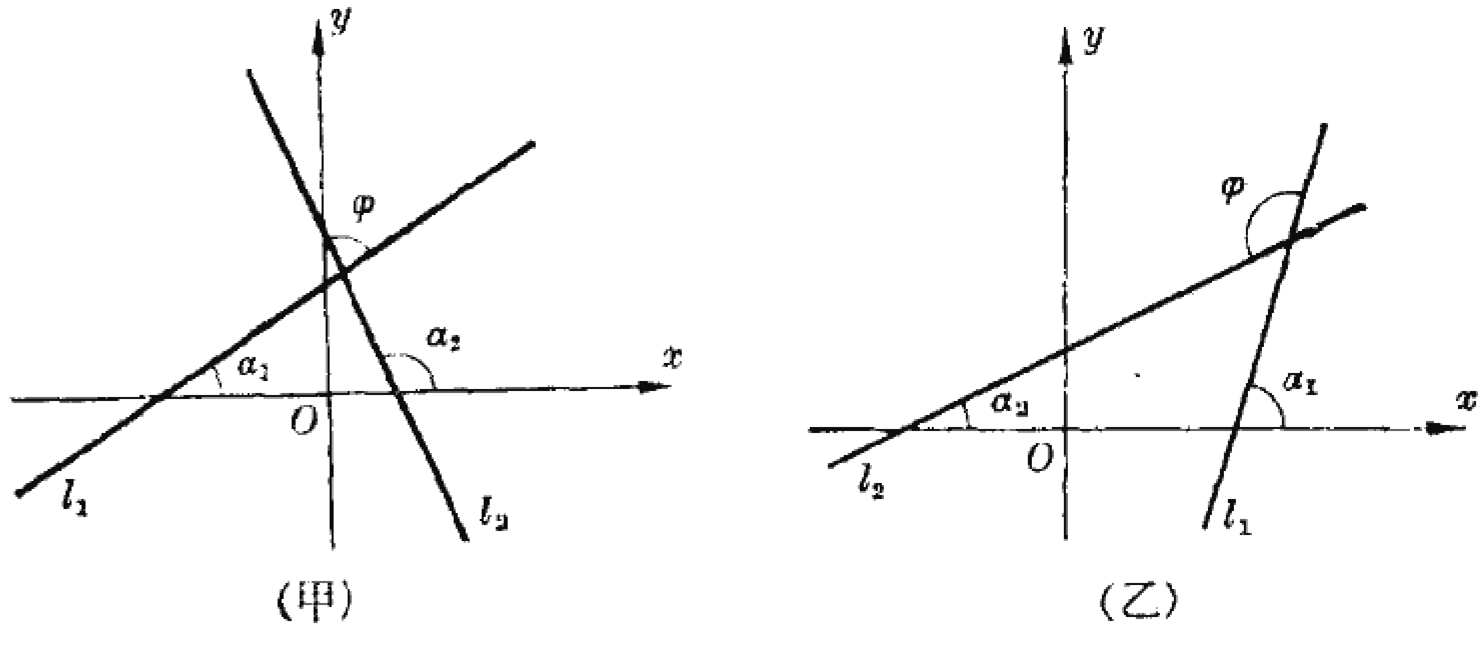


图 5-20

或

$$\varphi=\pi+\alpha_2-\alpha_1 \quad (\alpha_2<\alpha_1).$$

根据三角中的和角公式得

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2},$$

即

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \tag{13}$$

当 l_1 和 l_2 由一般方程

$$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0$$

给出时，将 $k_1=-\frac{A_1}{B_1}$ 和 $k_2=-\frac{A_2}{B_2}$ 代入(13)，得到

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}. \tag{14}$$

式(13)和(14)都是求两直线间交角的公式.

作为特殊情况，可以得到两直线平行的条件和垂直的条件：

(1) l_1 与 l_2 平行的条件是 $\varphi=0$，即

$$k_1=k_2 \tag{15}$$

或

$$A_1B_2-A_2B_1=0. \tag{16}$$

(2) l_1 与 l_2 垂直的条件是 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，即

$$k_1k_2=-1 \tag{17}$$

或

$$A_1A_2+B_1B_2=0. \tag{18}$$

[例 2] 求过点 M (2, 3) 并和直线 l: $2x-3y+1=0$ 平行的直线 l' 的方程.

解：l 的斜率 $k=\frac{2}{3}$，l' 与 l 平行，它的斜率 $k'=k=\frac{2}{3}$，由点斜式，l' 的方程为

$$y-3=\frac{2}{3}(x-2),$$

即

$$2x-3y+5=0.$$

[例 3]　已知 $\triangle ABC$ 三个顶点为 $A(1, 2)$，$B(4, 1)$，$C(3, 4)$，求 AB 上的高 CD 所在直线 l 的方程(图 5-21)。

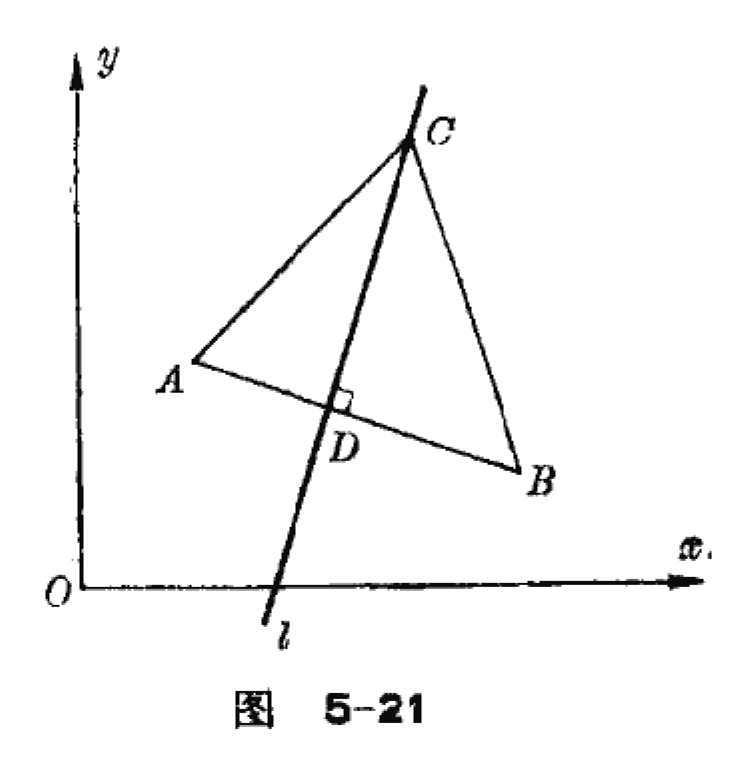


图　5-21

解：直线 AB 的斜率为

$$k_{AB}=\frac{1-2}{4-1}=-\frac{1}{3}.$$

l 与直线 AB 垂直，所以它的斜率为

$$k=-\frac{1}{k_{AB}}=3.$$

由点斜式，l 的方程为

$$y-4=3(x-3),$$

即

$$3x-y-5=0.$$

[例 4]　求直线 l_1 到 l_2 的交角，已知

$$l_1:\ y=2x+3,\quad l_2:\ 3x+y-6=0.$$

解：因为 $k_1=2$，$k_2=-3$，由式(13)得

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-3-2}{1+2(-3)}=1,$$

所以 l_1 到 l_2 的交角 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

［例 5］ 图 5-22 为某飞机机翼的平面图，试根据图中尺寸(单位：毫米)，计算斜肋 DE 之长.

解：取坐标系如图所示.斜肋 DE 的长可由 D、E 两点的坐标用距离公式算出. D 的坐标为

$x_D=3000$,

$y_D=3000\operatorname{tg}30^\circ=1732$,

而 E 是 BC 和 DE 的交点，所以要先求 BC 和 DE 的方程.

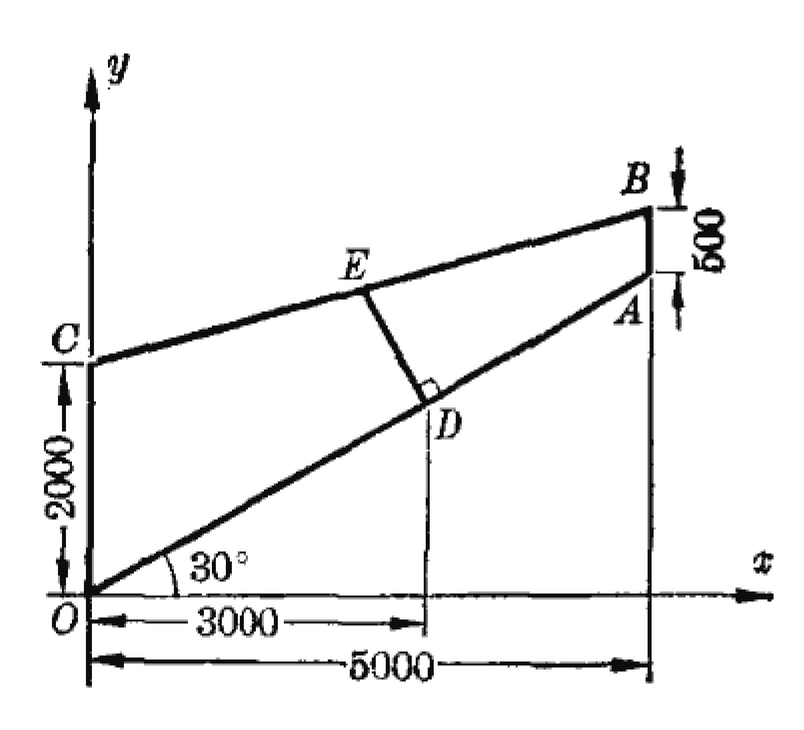


图 5-22

因直线 DE 垂直于 OA，而 $k_{OA}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以

$$k_{DE}=-\frac{1}{k_{OA}}=-\sqrt{3}=-1.732,$$

由点斜式得 DE 的方程为

$$y-1732=-1.732(x-3000),$$

即
$$1.732x+y-6928=0.$$

直线 CB 过点 $C(0,\ 2000)$ 和 B，而 B 的坐标为

$$x_B=5000,\quad y_B=5000\operatorname{tg}30^\circ+500=3387,$$

由两点式得 BC 的方程为

$$\frac{x}{5000}=\frac{y-2000}{1387},$$

即

$$1387x-5000y+10000000=0.$$

解 DE 和 CB 的方程所组成的方程组，得 E 点的坐标为

$$x_E=2452,\quad y_E=2680,$$

根据距离公式得 DE 的长度

$$DE=\sqrt{(2452-3000)^2+(2680-1732)^2}=1095\ (\text{毫米}).$$

二、直线和圆的相交、相切

圆和直线的相互位置，可分三种情况，即相交(有两个交点)，相切(两个交点重合为一点)，相离(没有公共点). 这些情况都可以用解方程组的办法来讨论. 下面通过一些例子来说明.

[例 6] 已知圆的方程 $x^2+y^2=25$ 和直线的方程 $x-7y+25=0$, 求这两曲线的交点.

解: 这两曲线的交点必须满足两曲线的方程所组成的方程组

$$x^2+y^2=25,$$
$$x-7y+25=0,$$

解这方程组，得两组实数解

$$x_1=3,\quad y_1=4$$

和

$$x_2=-4,\quad y_2=3.$$

这表明所求交点有两个，即 $(3, 4)$ 和 $(-4, 3)$.

[例 7] 已知直线方程 $2x-y+\sqrt{5}=0$ 和圆的方程 $x^2+y^2=1$, 求这两曲线的交点.

解: 将这两曲线的方程联立并解这方程组，得到相同的两组解

$$x_1=x_2=-\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$y_1=y_2=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

这表明直线和圆的两个交点重合为一点 P，它的坐标为 $\left(-\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$，也就是说，直线和圆相切，$P$ 点是切点.

由此可知：

如果两条曲线的方程所组成的方程组的两组实数解相同，即这两条曲线的两个交点重合时，这两条曲线相切，这组实数解就是切点的坐标.

利用这一原理，我们可以求出圆的切线方程.

[例 8] 已知圆的方程为 $x^2+y^2=16$，求它的斜率为 $k=-1$ 的切线方程.

解：可设切线方程为

$$y=-x+b,$$

其中 b 是待定常数，它和圆的方程所组成的方程组

$$x^2+y^2=16,$$
$$y=-x+b,$$

应有两组相同的解. 把后一方程代入前一方程，得一元二次方程

$$2x^2-2bx+b^2-16=0,$$

它有重根的条件为 $(B^2-4AC=0)$

$$4b^2-8(b^2-16)=0,$$

解得 $\quad b=\pm4\sqrt{2}$.

所以所求切线方程为(图 5-23)

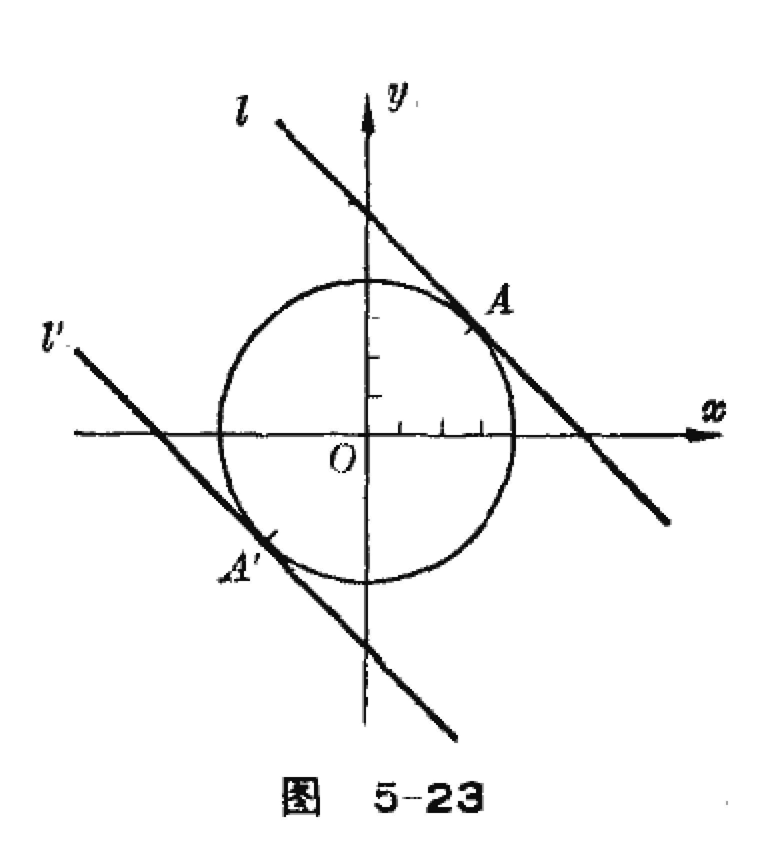


图 5-23

$$y=-x+4\sqrt{2} \quad 与 \quad y=-x-4\sqrt{2}.$$

[例 9] 图5-24为某工件的剖面图，试根据图上尺寸(单位：毫米)计算 P 点到端面 MN 的距离.

解：取坐标系如图所示. P 点是直线 AP 和圆弧 PN 的交点. 我们先求出它们的方程，然后解方程组得交点的横坐标 x，即所求的距离.

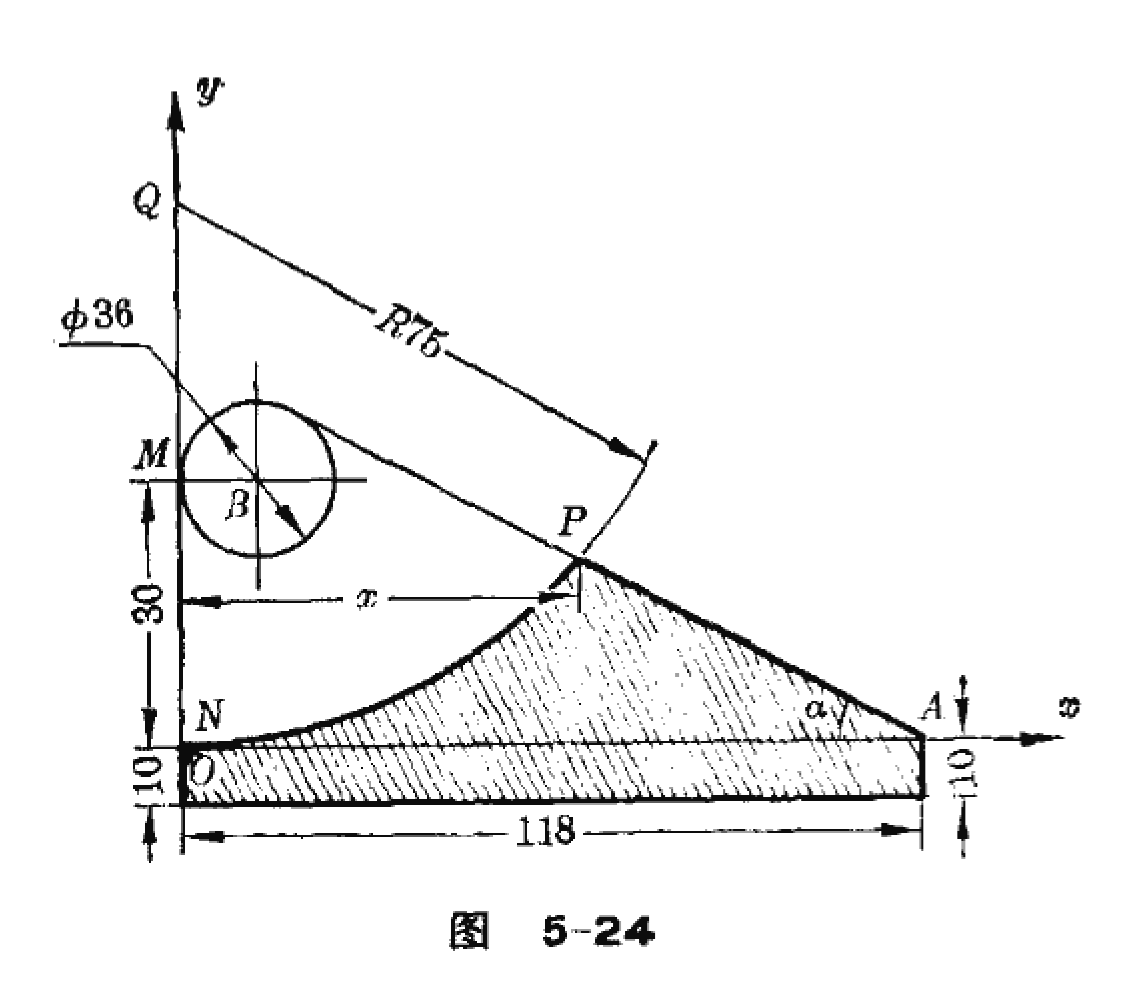


图 5-24

设直线 AP 的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，因点 $A(118,0)$ 在直线上，所以 $y=k(x-118)$，它是以 B 为圆心、18为半径的圆的切线，根据上面求切线的方法，待定的 k 必须使方程组

$$(x-18)^2+(y-30)^2=18^2,$$
$$y=k(x-118)$$

的两组解相同.

将第二式代入第一式以消去 y，展开并合并同类项得

$$(1+k^2)x^2-2[18+k(118k+30)]x+(118k+30)^2=0,$$

它有重根的条件为

$$[18+k(118k+30)]^2-(1+k^2)(118k+30)^2=0,$$

化简得

$$2419k^2+1500k+144=0.$$

解得

$$k_1=-0.50,\quad k_2=-0.12.$$

从图上可见，AP 的斜率应取 k_1、k_2 中绝对值较大者，所以应取 $k_1=-0.50$，于是切线 AP 的方程为

$$y=59-0.5x.$$

圆弧 $\widehat{PN}$ 的中心为 $Q(0,75)$，半径为 75，它的方程为

$$x^2+(y-75)^2=75^2.$$

最后求 AP 和 $\widehat{PN}$ 的交点 P 的横坐标 x，即解方程组

$$y=59-0.5x,$$
$$x^2+(y-75)^2=75^2,$$

得

$$x_1=59.4,\quad x_2=-72.2\ (\text{不合题意}),$$

所以 P 到 MN 的距离为 $x=59.4$ 毫米.

三、点到直线的距离

已知直线 l：

$$y=kx+b$$

和线外一点 $P_0(x_0,y_0)$，我们来求点 P_0 到直线 l 的距离.

过 P_0 作 y 轴的平行线和 l 的垂线，分别交 l 于 Q 和 M（图 5-25），则点 P_0 到直线 l 的距离

$$d=P_0M=P_0Q|\cos\alpha|,$$

其中 α 是 l 的倾角. 设 Q 的坐标为 (x_1,y_1)，因为它在 l 上，且 $x_1=x_0$，得 $y_1=kx_0+b$，所以

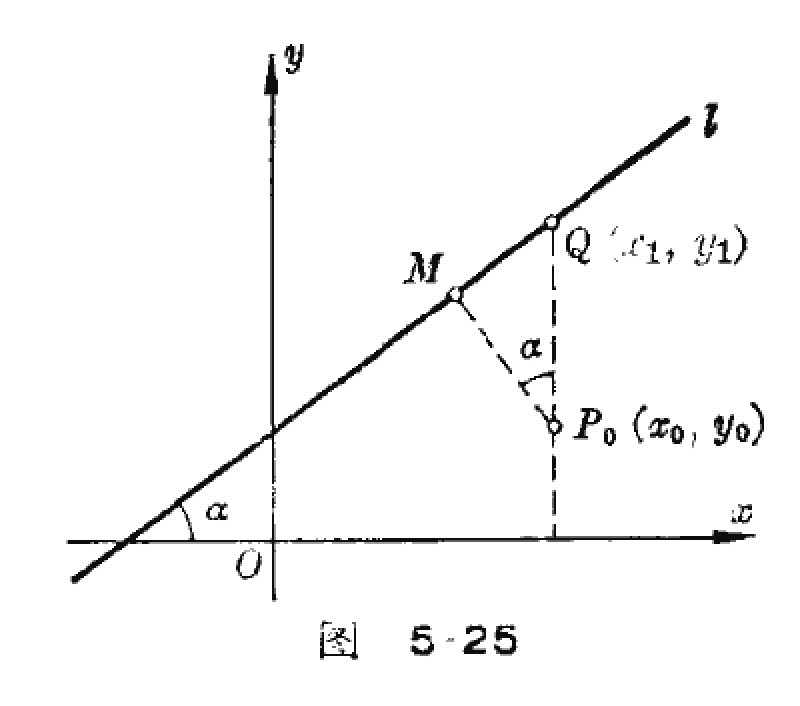


图 5-25

$$P_0Q=|y_0-y_1|=|y_0-kx_0-b|.$$

由 $\mathrm{tg}\,\alpha=k$ 得 $|\cos\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$，因此

$$d=\frac{|y_0-kx_0-b|}{\sqrt{1+k^2}}. \tag{19}$$

式(19)就是点(x_0, y_0)到直线 $y=kx+b$ 的距离的计算公式.

当直线方程取一般式 $Ax+By+C=0$ 时，以 $k=-\frac{A}{B}$ 和 $b=-\frac{C}{B}$ 代入式(19)，化简可得

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{20}$$

式(20)是点(x_0, y_0)到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离的计算公式.

[例 10] 求点(3, 2)到直线 $3x-4y+9=0$ 的距离.

解：由式(20)得

$$d=\frac{|3\times3-4\times2+9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2.$$

用点到直线的距离公式来求圆的切线是非常方便的，因为圆心到圆的切线的距离恰为半径之长.

[例 11] 求圆 $x^2+y^2=1$ 的过 $A(2, 1)$ 的切线的方程.

解：所求的切线方程可写为

$$y-1=k(x-2),$$

其中 k 待定. 因为圆心(0,0)到它的距离 $d=1$，我们有

$$d=\frac{|1-2k|}{\sqrt{1+k^2}}=1,$$

解得 $k_1=0$ 和 $k_2=\frac{4}{3}$，由此，两条切线的方程分别为

$$y=1, \quad 4x-3y-5=0.$$

［例 12］ 一钣制零件如图 5-26 所示，试按照图上尺寸求圆弧 $R50$ 的中心 $Q(x_0, y_0)$ 的横坐标 x_0.

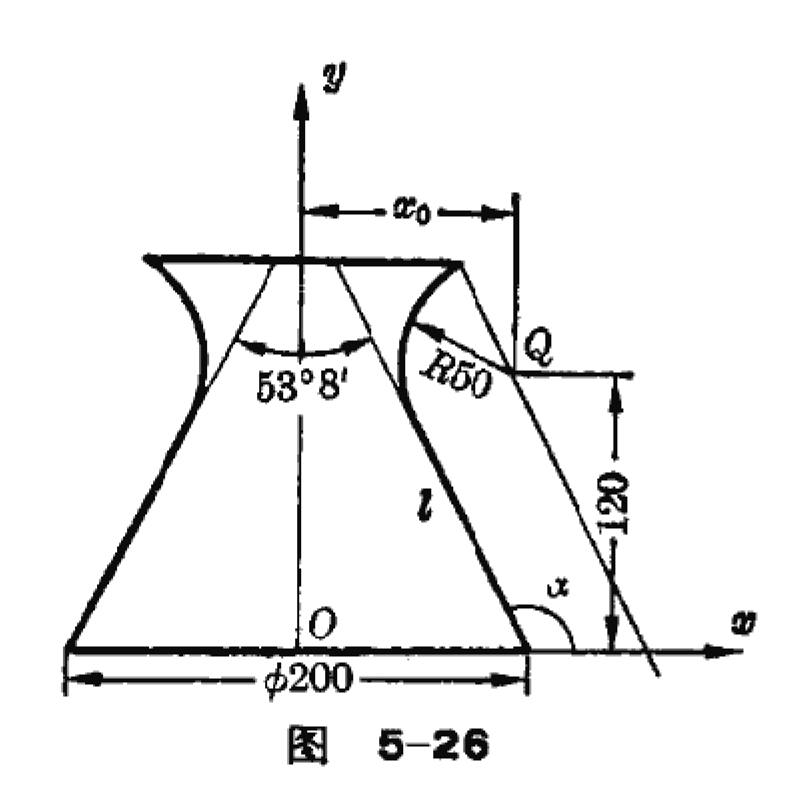


图 5-26

解：因为圆弧 $R50$ 与直线 l 相切，所以 Q 到 l 的距离 $d=50$，且它的纵坐标 $y_0=120$．根据这些条件，我们来定出 x_0.

l 的倾角 $\alpha=116°34'$，斜率 $k=\operatorname{tg}\alpha=-2$，它的方程为

$$y=-2(x-100).$$

上面所说的 Q 所满足的条件即为

$$d=\frac{|120+2(x_0-100)|}{\sqrt{1+2^2}}=50,$$

解得

$$x_0=95.9 \text{ 和 } -15.9,$$

根据题意，Q 的横坐标应为 $x_0=95.9$（毫米）.

小　　结

1．两直线

$$l_1: \ A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2: \ A_2x+B_2y+C_2=0$$

之间的关系有

(1) 交角公式：

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{A_1B_2-B_1A_2}{A_1A_2+B_1B_2},$$

(2) 平行条件：

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2};$$

(3) 垂直条件：

$$A_1A_2+B_1B_2=0.$$

2. 当一直线和一圆的方程所组成的方程组的两组实数解相同时，即它们的两个交点重合时，直线和圆相切，这组实数解就是切点的坐标.

3. 点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

习　题

1. 判别下列各对直线是平行还是相交；如果相交，求出它们交点的坐标，在相交直线中指出哪几对是垂直的：

(1) $3x+4y=5$，$6x+8y=7$；

(2) $3x+4y=1$，$x=5y$；

(3) $y=3x+4$，$2y-6x+1=0$；

(4) $y=\frac{1}{3}x+5$，$3x+y+4=0$；

(5) $y=4x+5$，$-\frac{x}{4}-y=0$；

(6) $5x+y=1$，$x-5y=4$；

(7) $6x+2y=7$，$x-3y=4$；

(8) $3x+4y=5$，$4x-3y=5$；

(9) $6x+2y=4$，$x+3y=7$；

(10) $x=2y+5$，$2x-4y=6$.

2. 求下列各对直线的交角和交点坐标：

(1) $y=\frac{1}{2}x+2$, $y=3x-7$;

(2) $y=3x-1$, $y=-\frac{1}{3}x+4$;

(3) $4x+3y-1=0$, $x+2y=0$.

3. 求过点$(1, 1)$并与直线$y=1-\frac{1}{2}x$的交角为$60°$的直线的方程. 这样的直线有几条？

4. 已知下列条件，求直线的方程：

(1) 过点$(-3, 4)$且平行于直线$5x+4y=6$;

(2) 过点$(4, -3)$且垂直于两点$(4, 1)$和$(7, 3)$的连线；

(3) 过两直线$3x-y-3=0$和$4x+3y-4=0$的交点，且垂直于第一条直线；

(4) 纵截距为$b=3$且和直线$2x-3y+6=0$垂直；

(5) 过点$(-1, 3)$且过两直线$2x+5y-14=0$和$4x-3y+11=0$的交点.

5. 已知直线$ax+2y+8=0$经过两直线$4x+3y=0$和$2x-y=10$的交点，求a的值.

6. 已知两点$A(-3, 1)$和$B(3, -7)$，试在y轴上求出点M，使AM与BM垂直.

7. 用解析法证明半圆上的圆周角为一直角.

8. 求圆$x^2+y^2=100$和下面直线的交点，并说明哪条是切线：

(1) $x-7y+50=0$;　　　　(2) $3x-4y-50=0$.

9. 证明圆$x^2+y^2-18x+45=0$和直线$y=\frac{4}{3}x-2$相切.

10. 求下列各题中所给点到所给直线的距离：

(1) 直线$3x+4y+3=0$和点$(2, 3)$;

(2) 直线$12x+5y-3=0$和点$(-5, -7)$;

(3) 直线$2x=3y$和点$(1, 5)$.

11. 根据下列条件，写出直线l的方程：

(1) l的倾角为$\frac{5}{6}\pi$，原点到l的距离为$5\sqrt{3}$;

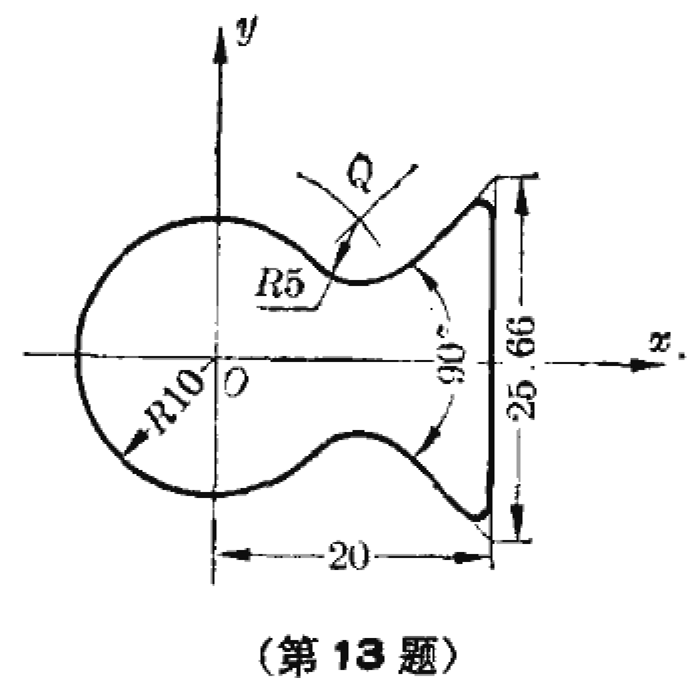
(2) l 的斜率为1，原点到 l 的距离为5.

12. 已知圆 $x^2+y^2=4$ 和圆外一点 $A(-5, 0)$，试问过 A 点的直线在下列三种不同情况下的斜率 k 是多少？

(1) 直线和圆相切；

(2) 直线和圆相交；

(3) 直线和圆相离，并求出相切情况下切点的坐标.



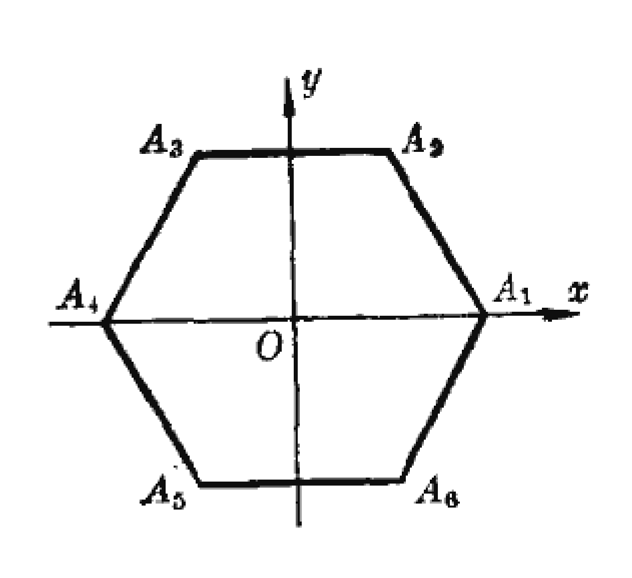
(第 13 题)

13. 有一冲模如图所示，用线切割机加工时须要知道圆弧 $R5$ 的中心 Q，试根据图上尺寸计算出 Q 的坐标.

14. 求以 $M(1, 4)$ 为圆心且与直线 $4x-3y-4=0$ 相切的圆的方程.

复　习　题

1. 一边长为 a 的正六边形在如图所示坐标系中，试求各顶点的坐标.



(第 1 题)

2. 证明以 $A(3, 2)$，$B(6, 5)$，$C(1, 10)$ 为顶点的三角形是直角三角形.

3. 点 M 在 x 轴上，它到原点的距离等于到点$(-5, 3)$的距离，试求点 M 的坐标.

4. 已知三角形的两顶点 $A(3, 7)$，$B(-2, 5)$，求第三个顶点 C，使 AC 的中点在 x 轴上，BC 的中点在 y 轴上.

5. 已知三角形的两顶点 $A(2, 2)$，$B(3, 0)$ 和重心 $M(3, 1)$，试求第三个顶点 C.

6. 一艘渔船在某岛东 34 浬、北 2 浬的海面上遇险，海轮“长风号”正在该岛东 10 浬，南 5 浬处行驶，该轮接到信号后立即以 20 浬/小时的速度前往营救，问多少时间才能赶到出事地点？

7. 已知下列条件，求直线的方程：

(1) 过点 $(-3, 4)$ 且倾角为 $\frac{3}{4}\pi$；

(2) 过两直线 $2x-3y-1=0$ 和 $3x-y-2=0$ 的交点且垂直于直线 $y=x$；

(3) 过两直线 $x+y-1=0$，$x-y+2=0$ 的交点和点 $(2, 1)$；

(4) 过两直线 $x-y-3=0$ 和 $2x+3y-1=0$ 的交点且平行于直线 $5x-4y-17=0$.

8. 已知直线 l：$2x+5y-20=0$，试求：

(1) l 与两坐标轴所围成的三角形的面积；

(2) l 夹在两坐标轴之间线段的长度.

9. 方程 $x^3+xy^2=x$ 表示什么图形？

10. 设动点 M 到点 $A(3, 0)$ 的距离等于它到点 $B(-6, 0)$ 的距离的一半，试求 M 点的轨迹.

11. 设动点 M 到两定点 $(-a, 0)$ 和 $(a, 0)$ 的连线互相垂直，试求点 M 的轨迹.

12. 已知圆的方程 $x^2+y^2=4x$，求由圆周上定点 $P(a, b)$ 所作各弦的中点 $M(x, y)$ 的轨迹.

13. 设点 P 在直线 $3x+2y-5=0$ 上，它到点 $(-1, -1)$ 和 $(3, 3)$ 有相等的距离，试求点 P 的坐标.

14. 已知两直线

$$l_1:\ 3x+4y-10=0, \quad l_2:\ 4x+6y+7=0,$$

(1) 证明任何过 l_1 与 l_2 交点 P 的直线方程可写为

$\lambda(3x+4y-10)+\mu(4x+6y+7)=0$ （λ, μ 不全为 0）；

(2) 试求过点 P 与点 $(4, -7)$ 的直线.

15. 已知直线 l 过点 $A(5, 2)$，且点 $B(-3, 1)$ 到它的距离为 4，试求 l 的方程.

16. 求直线 $3x+4y-9=0$ 与直线 $12x+9y-8=0$ 的交角的平分线的方程.

17. 已知 $\triangle ABC$ 三顶点坐标为 $A(1, 2)$, $B(4, 1)$, $C(3, 4)$, 求:

(1) $\triangle ABC$ 的三条中线的方程;

(2) $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心与半径;

(3) BC 边上的高所在直线的方程;

(4) 过 A 且平行于 BC 的直线的方程;

(5) $\triangle ABC$ 的面积;

(6) $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的值.

18. 用解析法证明三角形的三条高相交于一点.

19. 求与原点及直线 $x+4y=3$ 等距离的点的轨迹.

20. 用解析法证明等腰三角形底边上一点到两腰的距离之和等于腰上的高.

第六章　抛物线　椭圆　双曲线

在三大革命实践中，除了直线和圆构成的图形外，还常常遇到一些其他曲线．例如，在道路建筑中，路拱常做成抛物线形状；机床上有些机械零件的轮廓线是椭圆；航海中常利用双曲线导航系统等．这三种曲线是最基本的曲线，有着极其广泛的应用，需要我们作深入的讨论．

在这一章中，我们首先给出抛物线、椭圆和双曲线的定义，并选择适当的坐标系建立它们的方程，然后用代数方法研究这些曲线的性质．

第一节　抛　物　线

正如恩格斯曾经指出的：“**数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的。**”① 抛物线的概念是从抛射体运动的轨迹曲线（在不考虑空气阻力时）得到的．例如，投掷出的手榴弹和发射出的炮弹，它们运动的轨迹就都是抛物线．

抛物线在实践中也有广泛的应用．例如汽车前灯的反射镜面就是一个由抛物线绕其对称轴旋转所生成的曲面——抛物面．为什么采用抛物面作为反射镜面以及如何加工抛物面，这都是与抛物线几何性质紧密联系的．

---

① 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社 1970 年版，第 35 页。

一、抛物线的定义和标准方程

在第五章中我们曾说过，曲线可以看作是按一定规律运动的点的轨迹．下面就用轨迹条件来给出抛物线的定义．

定义 到一个定点和到一条定直线的距离相等的动点的轨迹称为抛物线．这定点称为抛物线的焦点，定直线称为抛物线的准线．

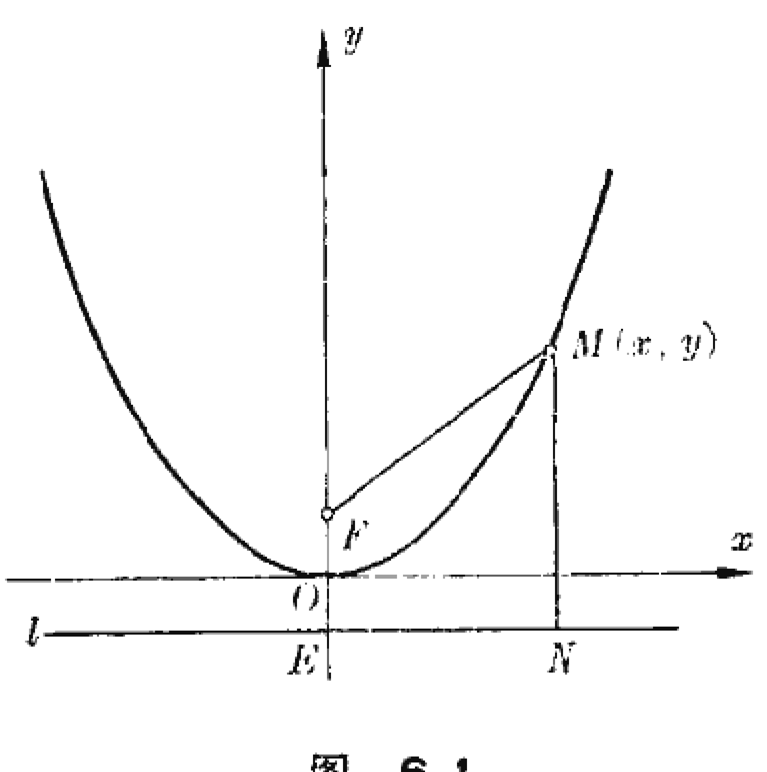


图 6-1

根据上述定义，我们来推导抛物线的方程．

如图 6-1，以过焦点 F 且垂直于准线 l 的直线为 y 轴，y 轴和 l 相交于 E，以线段 EF 的垂直平分线为 x 轴，建立直角坐标系．

设 $EF=p(p>0)$，且点 F 在 x 轴的上方，则点 F 的坐标为 $\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$，准线 l 的方程为 $y=-\frac{p}{2}$．

设 $M(x, y)$为抛物线上任一点，连 MF，并作 $MN\perp l$，N 为垂足．由抛物线的定义，有

$$MF=MN.$$

由距离公式得

$$MF=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2},$$

而

$$MN=y+\frac{p}{2},$$

因此

$$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}=y+\frac{p}{2}.$$

两边平方并化简得

$$x^2=2py \quad (p>0).$$

由于 $M(x,y)$ 为抛物线上任一点，所以抛物线上的点的坐标都适合这方程. 反之，设点 $M(x, y)$ 的坐标适合这方程，它是不是一定在抛物线上呢？由于

$$MF=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{2py+y^2-py+\frac{p^2}{4}}$$

$$=\sqrt{\left(y+\frac{p}{2}\right)^2}=\left|y+\frac{p}{2}\right|,$$

即 M 到焦点的距离等于 M 到准线的距离，所以点 M 在抛物线上. 这表明上面的方程是抛物线在所取坐标系中的方程.

如果取焦点 F 在 x 轴下方，准线在 x 轴上方，则用同样的方法可推得抛物线方程为

$$x^2=-2py \quad (p>0).$$

我们引入a：$a=\pm\frac{1}{2p}$，则上面的两种方程可统一写成

$$y=ax^2, \tag{1}$$

方程(1)称为抛物线的标准方程. 显然，抛物线 $y=ax^2$ 的焦点是 $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$，准线是 l：$y=-\frac{1}{4a}$.

二、抛物线的图形

要了解抛物线的形状，可以根据它的方程，采用代数中讲过的描点法作出它的图形来分析. 图 6-2 就是用描点法作出的 $y=ax^2$ 的图形.

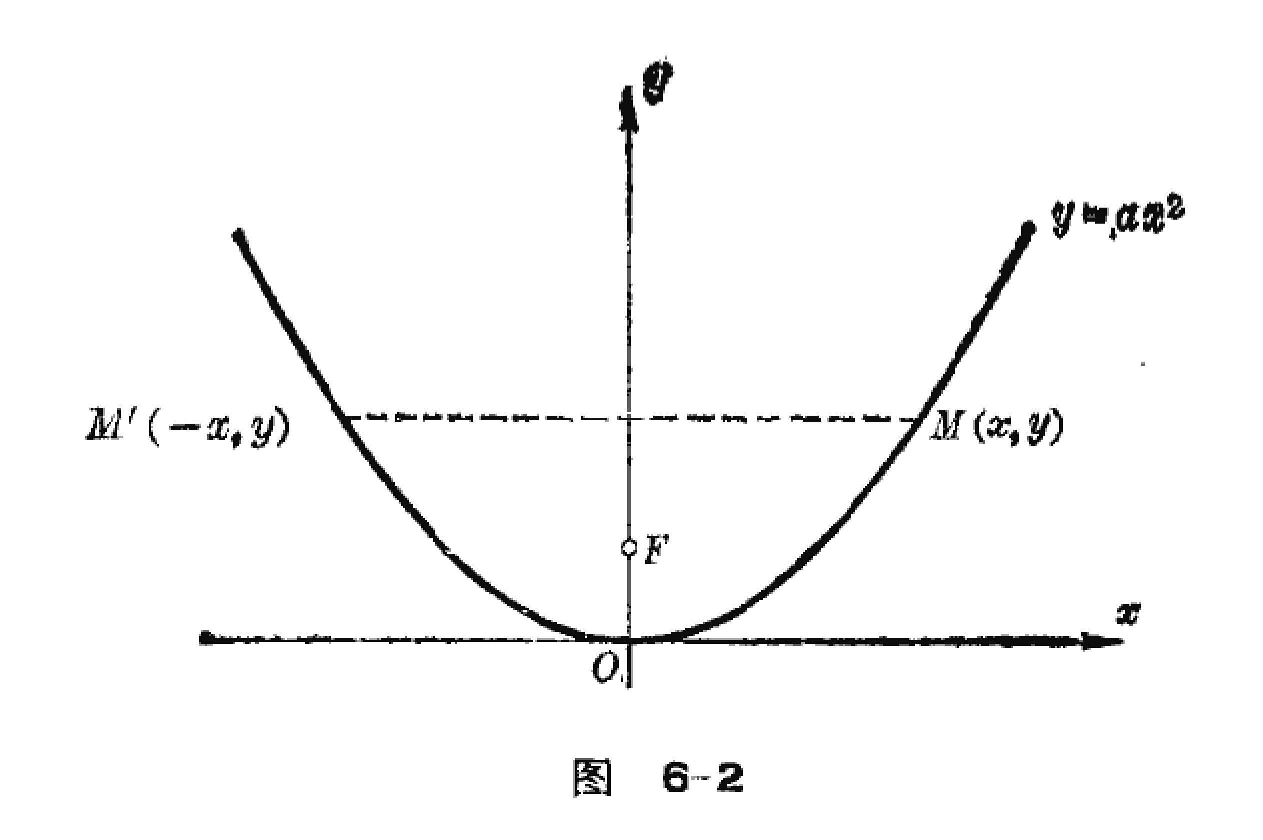


图 6-2

下面我们参照抛物线的图形，从它的方程来分析它的几何性质.

1. 对称性

从抛物线的图形看出，抛物线 $y=ax^2$ 有一根对称轴，就是 y 轴. 它的方程 $y=ax^2$ 也说明了这一点. 因为方程中 x 只以平方项出现，所以如果(x, y)满足方程，则$(-x, y)$也满足方程. 这就是说，曲线上任意点 $M(x, y)$ 关于 y 轴的对称点 $M'(-x, y)$ 也在曲线上，所以抛物线关于 y 轴对称，y 轴为抛物线 $y=ax^2$ 的对称轴.

一般地，如果方程中 x 只以平方项出现，则曲线关于 y 轴对称；如果方程中 y 只以平方项出现，则曲线关于 x 轴对称.

2. 顶点

抛物线与它的对称轴的交点称为抛物线的顶点. 显然，抛物线 $y=ax^2$ 的顶点是坐标原点 $O(0, 0)$.

3. 抛物线的开口

抛物线是一条无限伸展的曲线，现在以抛物线 $y=ax^2$ 的图形为例，分析抛物线开口的方向、大小与系数 a 的关系. 为此取 $a=-1, -2, 1, 2$，作出四条抛物线 L_{-1}，L_{-2}，L_1，L_2，

如图 6-3 所示，我们看到，L_1 和 L_2 的开口向上，L_{-1} 和 L_{-2} 的开口向下；L_2，L_{-2}的开口比 L_1，L_{-1} 的开口窄.

一般地，对抛物线 $y=ax^2$，当 $a>0$ 时开口向上，当 $a<0$ 时开口向下；a 的绝对值愈大，则开口愈窄.

这些事实可以由方程 $y=ax^2$ 来说明，请读者自己讨论.

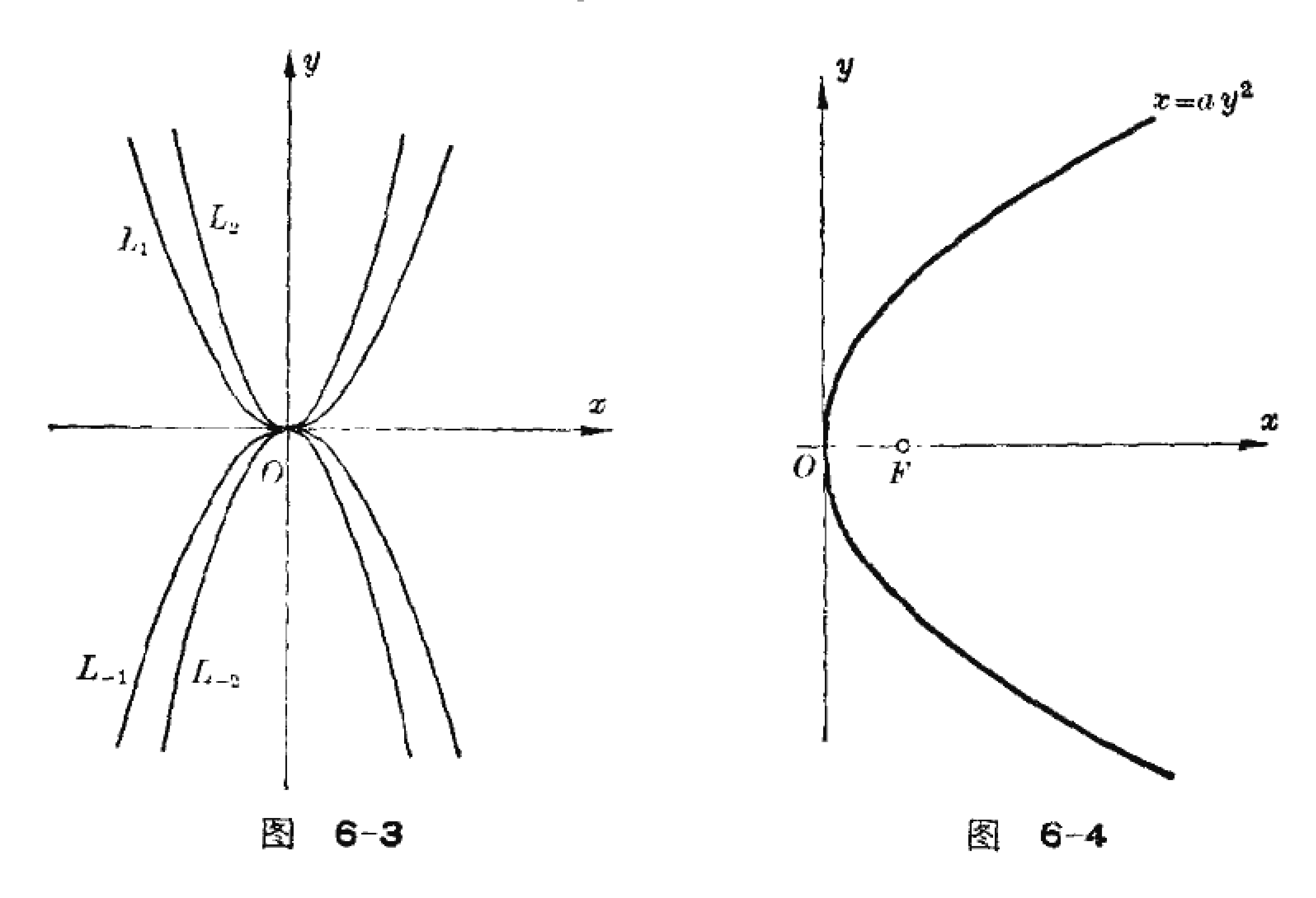


图 6-3　　　　图 6-4

另外，如果取坐标系如图 6-4 所示，则可导出抛物线的标准方程为 $x=ay^2$，它的对称轴为 x 轴，顶点是坐标原点，焦点是$\left(\frac{1}{4a}, 0\right)$. 当 $a>0$ 时开口向右，当 $a<0$ 时开口向左，$|a|$ 愈大则开口愈窄.

[例 1]　作出下列抛物线的图形：

$$L: \qquad y=-4x^2,$$

$$L': \qquad 2x-y^2=0.$$

解：根据上面的讨论，L 的顶点在原点，以 y 轴为对称轴，图形在 x 轴下方且开口向下. L' 的方程可写为 $x=\frac{1}{2}y^2$，

它的顶点在原点，以 x 轴为对称轴，图形在 y 轴右方且开口向右. 基于上述分析，再由方程算出曲线上一些点的坐标，用描点法就可以作出 L 和 L' 的图形(图 6-5, 6-6).

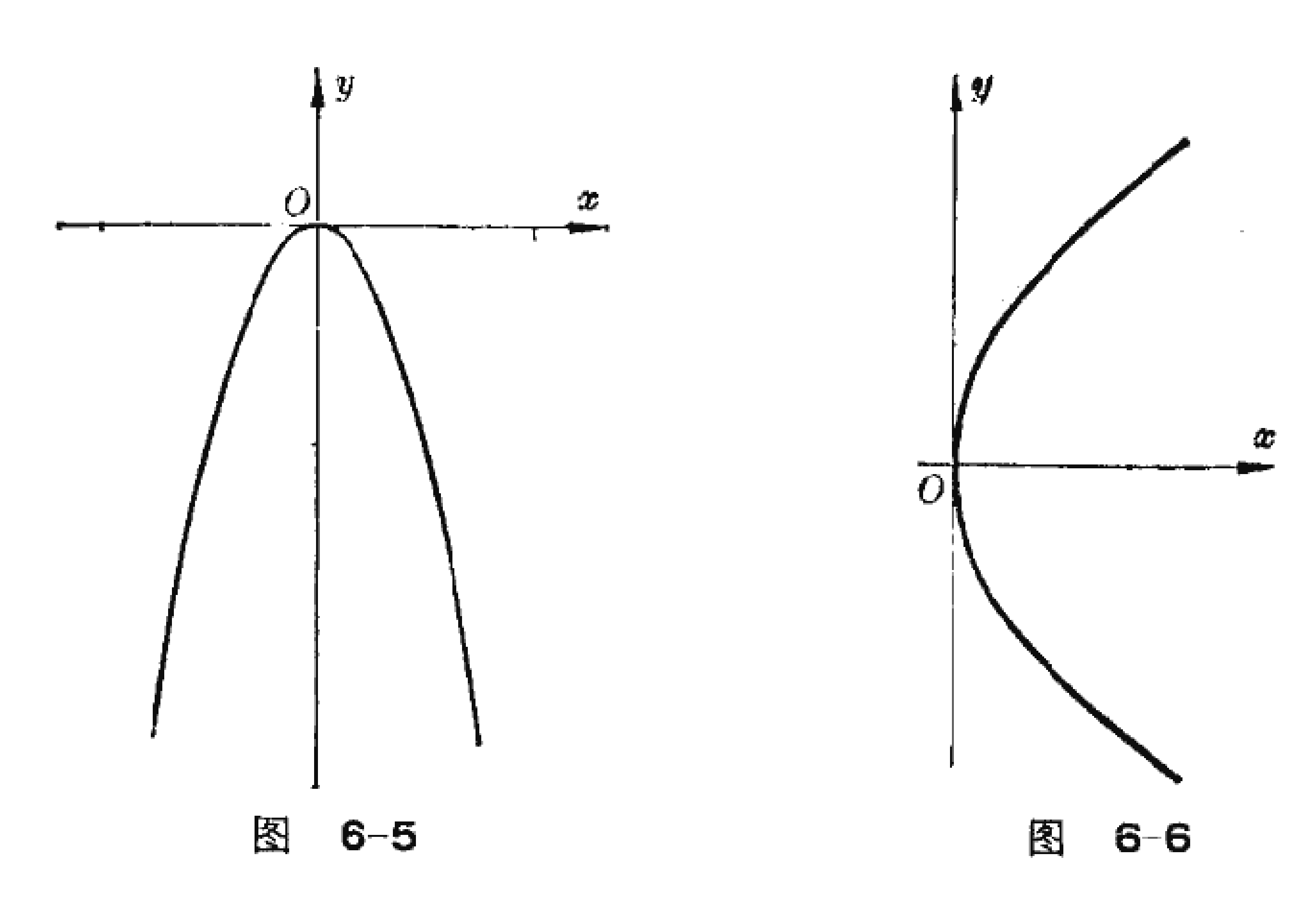


图 6-5　　　图 6-6

[例 2]　汽车前灯的反射镜面为一旋转抛物面，在加工反射面时，需要确定转成这抛物面的抛物线方程. 现已知顶点到焦点距离为 27 毫米，求此抛物线的方程.

解：设抛物线的方程为

$$x=ay^2,$$

其中 a 是待定系数.

因为抛物线 $x=ay^2$ 的顶点在 (0, 0)，焦点在$\left(\frac{1}{4a},\ 0\right)$，所以焦点与顶点的距离为 $\frac{1}{4a}$. 根据已知条件有

$$\frac{1}{4a}=27,\quad 即\quad a=\frac{1}{108}.$$

所以，抛物线方程为

$$x=\frac{1}{108}y^2.$$

三、抛物线的光学性质

抛物线除了上面提到的那些性质外，还有一个重要性质，这就是：从放在抛物线的焦点处的点光源发出的光线，经过抛物线反射后，成为一束和抛物线的对称轴平行的光线．采用抛物面作为反射镜面正是利用了抛物线的这一光学性质．抛物线为什么具有这一性质？这就涉及到它的切线和法线问题．

1．抛物线的切线

一条与抛物线相交于两点的直线称为抛物线的割线，当割线与抛物线的两交点沿着抛物线逐渐靠近，重合为一点的时候，就称这直线为抛物线的切线，重合点是切点．下面我们来讨论抛物线的切线问题．

设抛物线方程为 $x=ay^2$，$M_0(ay_0^2, y_0)$ 是抛物线上任一点，我们来确定斜率 k，使直线 $y-y_0=k(x-ay_0^2)$ 是抛物线在 M_0 点的切线（图 6-7）．为此，考虑方程组

$$x=ay^2,$$
$$y-y_0=k(x-ay_0^2).$$

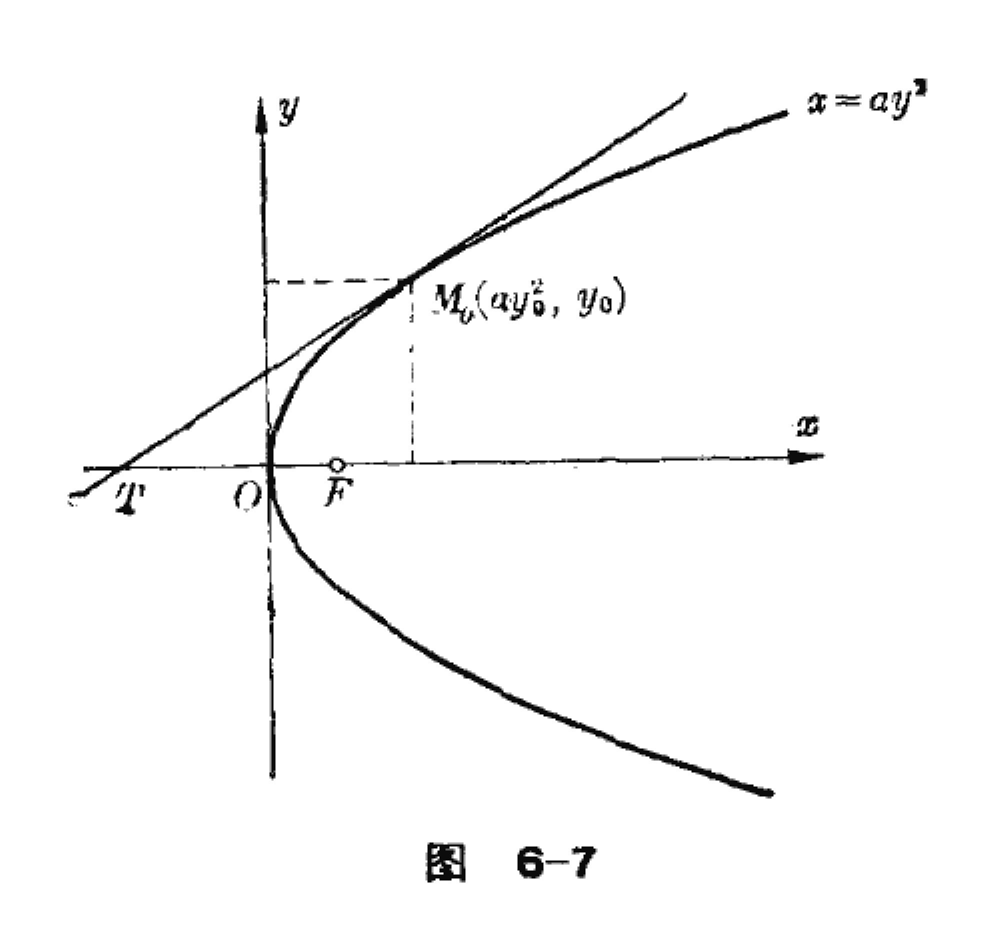


图 6-7

要使直线成为抛物线的切线，这个方程组必须有两组相同的实数解．现在我们来解这个方程组．

将第一式代入第二式消去 x，得到一元二次方程

$$y-y_0=ak(y^2-y_0^2),$$

上式可写为

$$ak(y-y_0)\left(y+y_0-\frac{1}{ak}\right)=0,$$

它的两个实根是

$$y_1=y_0 \quad 和 \quad y_2=\frac{1}{ak}-y_0.$$

要使 $y_1=y_2$，必须 $y_0=\frac{1}{ak}-y_0$，即

$$k=\frac{1}{2ay_0}, \tag{2}$$

这就是抛物线 $x=ay^2$ 在点 $M_0(ay_0^2, y_0)$ 处切线斜率的表达式．由此可得切线方程为

$$x+x_0=2ay_0y.$$

［例 3］ 求抛物线 $x=3y^2$ 在 $M_0(3, -1)$ 处的切线方程．

解：因 $a=3$, $x_0=3$, $y_0=-1$，故所求切线方程为

$$x+3=-6y,$$

即

$$x+6y+3=0.$$

同理，抛物线 $y=ax^2$ 在其上一点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的切线斜率为 $k=2ax_0$，切线方程为

$$y+y_0=2ax_0x.$$

2．抛物线的法线

过曲线上一点且与曲线在该点的切线垂直的直线称为曲线在这一点的法线．抛物线的法线有如下的重要性质．

性质 设点 M 为抛物线上任一点(图6-8)，MN 为抛物线在 M 点的法线，F 是抛物线的焦点，ME 是平行于抛物线对称轴的直线，则法线 MN 平分 $\angle FME$，即 $\varphi_1=\varphi_2$.

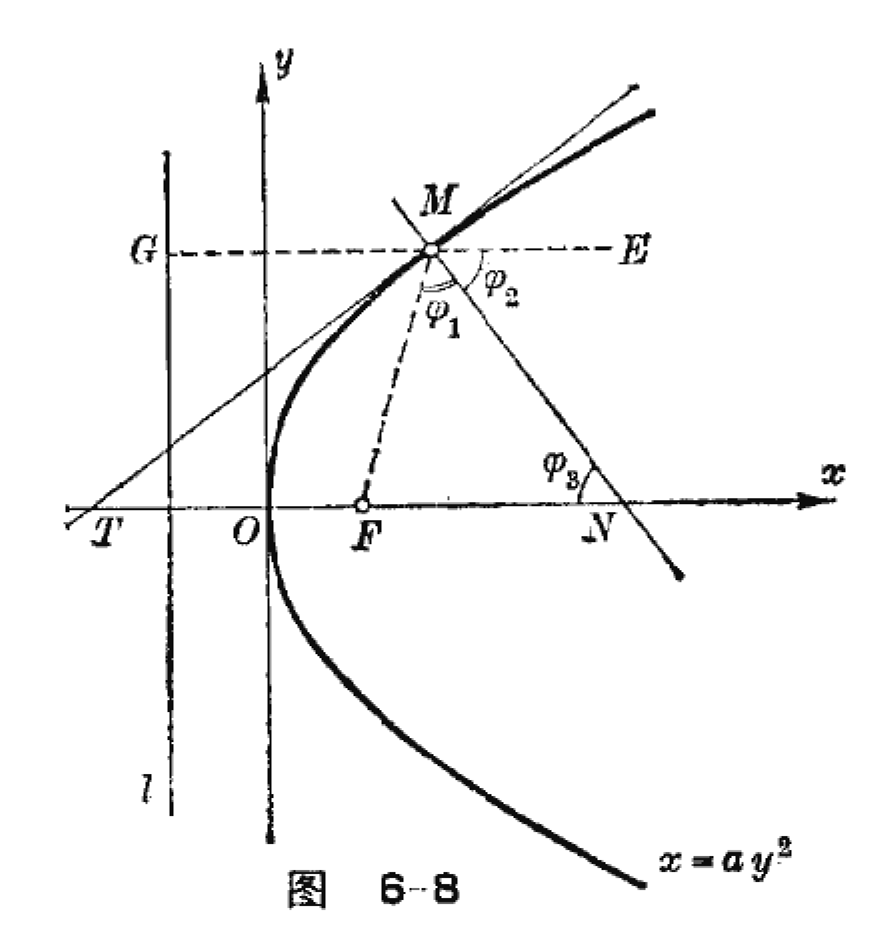


图 6-8

证明 选取坐标系如图6-8,这时抛物线方程为

$$x=ay^2.$$

设点 M 的坐标为(x_0, y_0)，MT 为切线，则 MT 的斜率为 $\frac{1}{2ay_0}$，从而法线 MN 的斜率为 $-2ay_0$.

由于 ME 平行于 x 轴 (抛物线的对称轴)，所以 $\varphi_2=\varphi_3$，为证明 $\varphi_1=\varphi_2$，只须证明 $\varphi_1=\varphi_3$ 即可，也就是，只要证明 $\triangle FMN$ 的两边 FM 和 FN 相等(N 为 MN 与 x 轴的交点).

一方面，由抛物线的定义，

$$FM=MG=x_0+\frac{1}{4a},$$

这里 G 是 ME 与准线的交点. 另一方面，法线的方程为

$$y-y_0=-2ay_0(x-x_0),$$

由此可求得法线与 x 轴的交点 N 的坐标为 $\left(x_0+\frac{1}{2a}, 0\right)$，所以

$$FN=ON-OF=x_0+\frac{1}{2a}-\frac{1}{4a}=x_0+\frac{1}{4a},$$

即

$$FN=FM,$$

故

$$\varphi_1=\varphi_3=\varphi_2.$$

3. 抛物线的光学性质

根据抛物线法线的性质，可以得到抛物线的光学性质：从抛物线焦点处的点光源发出的光线，经过抛物线反射后，成为一束和抛物线的对称轴平行的光线（图 6-9）.

事实上，设 FM 是由焦点 F 发出的任意一条光线，ME 是 FM 经抛物线反射后的光线. 根据光学中的反射定律：入射角（入射光线与法线所夹的角）等于反射角（反射光线与法线所夹的角），所以，由抛物线法线的性质，可知 ME 平行于抛物线的对称轴（见图 6-8）.

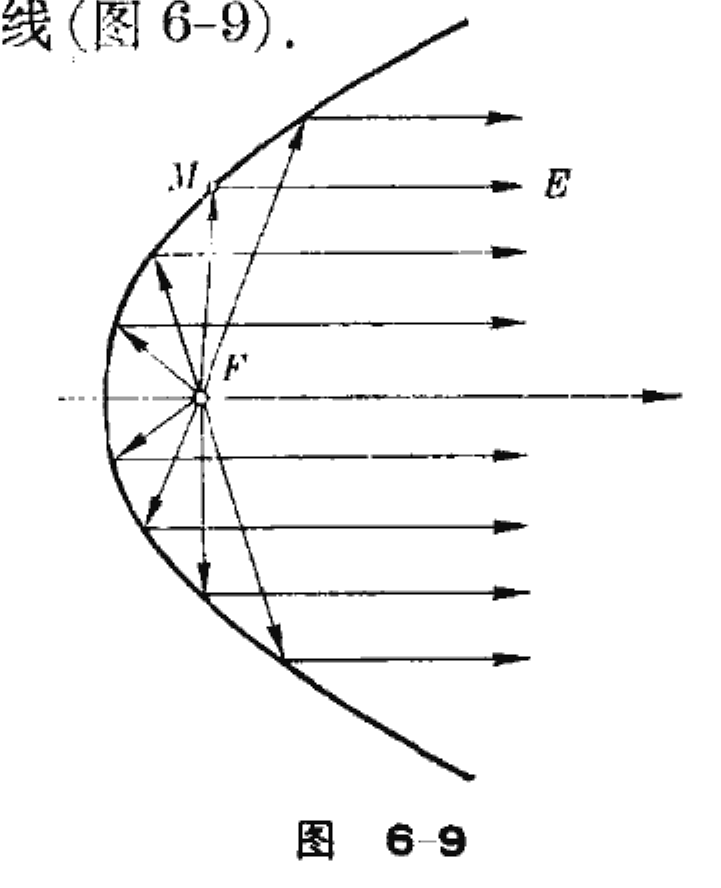


图 6-9

这样，当反射镜面采用由抛物线绕其对称轴旋转而生成的抛物面时，如果把点光源放在抛物线的焦点处，那末它发出的光线经过镜面反射后将成为一束平行光线.

汽车前灯就是利用抛物线的这一光学性质，以达到光效高，照明射程远的目的. 根据同一原理，探照灯、手电筒等也都采用抛物面作为反射镜面.

反之，平行于对称轴的光线，经过抛物面反射后汇聚到焦点. 太阳能灶的聚光镜就是根据这一原理设计的.

[例 4] 探照灯的反射镜面是抛物线绕其对称轴旋转一周生成的曲面，在 Oxy 坐标系中抛物线方程为 $x=\frac{1}{160}y^2$，问灯泡应放在何处？

解：根据抛物镜面的反射原理，应将灯泡放在抛物线的焦点处.

我们知道，抛物线 $x=ay^2$ 的焦点在 $\left(\frac{1}{4a},\ 0\right)$ 处. 现在方程为 $x=\frac{1}{160}y^2$，它的焦点为 $(40,\ 0)$. 所以灯泡应放在 $F(40,\ 0)$ 处.

四、$y=ax^2+bx+c$ 的图形

前面我们已经知道 $y=ax^2$ 的图形是一条抛物线，其对称轴为 y 轴，顶点为坐标原点. 那末，$y=ax^2+bx+c$ 的图形是怎样的呢？我们先讨论顶点不在原点，而对称轴平行于 y 轴的抛物线.

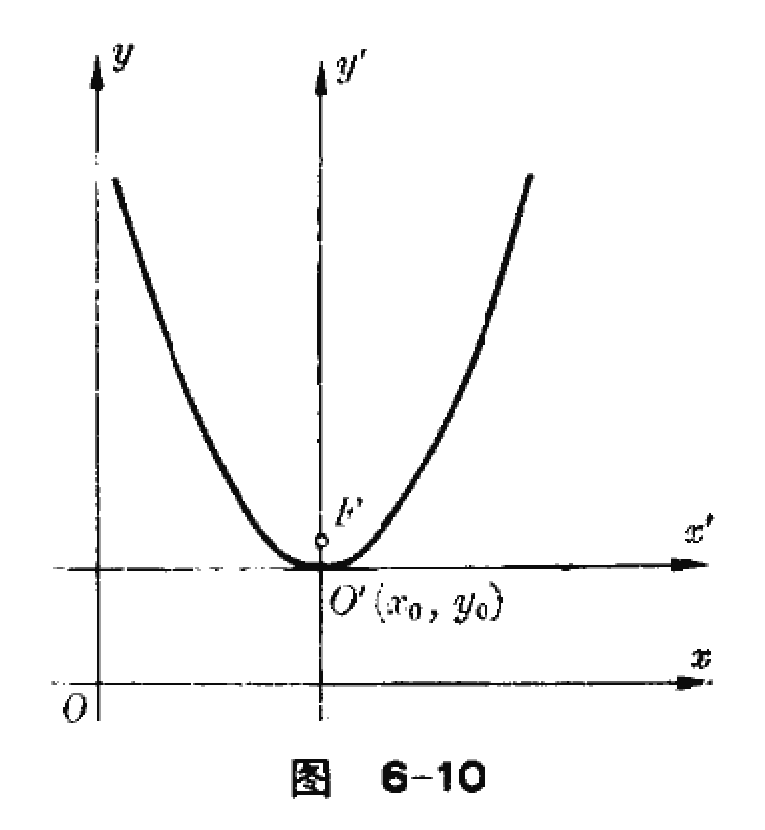


图 6-10

设抛物线的顶点在 $M_0(x_0,\ y_0)$，对称轴为 $x=x_0$（平行于 y 轴）. 为了求出抛物线的方程，将坐标系平移，使平移后坐标系 $O'x'y'$ 的原点为 M_0. 这时，在坐标系 $O'x'y'$ 中，由于抛物线的对称轴为 y' 轴，顶点为原点 O'（图 6-10），它的方程取形式

$$y'=ax'^2.$$

为了得到坐标系 Oxy 中的方程，只须将移轴公式

$$x'=x-x_0,\quad y'=y-y_0,$$

代入上面方程，就得

$$y-y_0=a(x-x_0)^2, \tag{3}$$

这就是顶点在 $(x_0,\ y_0)$，对称轴平行于 y 轴的抛物线方程.

把方程(3)右端平方项展开得

$$y=ax^2-2ax_0x+ax_0^2+y_0,$$

这里 $-2ax_0$，$ax_0^2+y_0$ 都是常数，记 $-2ax_0=b$，$ax_0^2+y_0=c$，

则得

$$y=ax^2+bx+c.$$

反之，对于方程

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0),$$

将右边配方，得到

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right),$$

即

$$y-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2,$$

与方程(3)比较，可知 $y=ax^2+bx+c$ 是一条对称轴平行于 y 轴的抛物线，它的顶点是$\left(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$，对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}$.

［例 5］ 在坐标系 Oxy 中，已知抛物线的顶点为(2, 3)，焦点坐标为(2, 4)，求抛物线方程.

解：抛物线顶点与焦点的连线为 $x=2$，即抛物线的对称轴是平行于 y 轴的直线 $x=2$，顶点在(2, 3). 由式(3)，这抛物线的方程有如下形式：

$$y-3=a(x-2)^2,$$

其中 a 待定.

焦点到顶点的距离为$\frac{1}{4a}$，即

$$4-3=\frac{1}{4a},$$

由此得到 $a=\frac{1}{4}$，从而抛物线的方程为

$$y-3=\frac{1}{4}(x-2)^2,$$

即

$$y=\frac{1}{4}x^2-x+4.$$

[例 6]　求抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{5}{2}$ 的顶点，焦点和对称轴，并作出它的图形.

解：首先将等式右边配方，得

$$y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-\frac{1}{2},$$

即

$$y+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x-2)^2.$$

可见，它的顶点为 $M_0\left(2,-\frac{1}{2}\right)$，对称轴为 $x=2$. 因为顶点到焦点距离为 $\left|\frac{1}{4a}\right|=\frac{1}{2}$，又抛物线开口向下，所以焦点为 $F(2,-1)$. 它的图形是一条以 $\left(2,-\frac{1}{2}\right)$ 为顶点、对称轴平行于 y 轴且开口向下的抛物线(图 6-11).

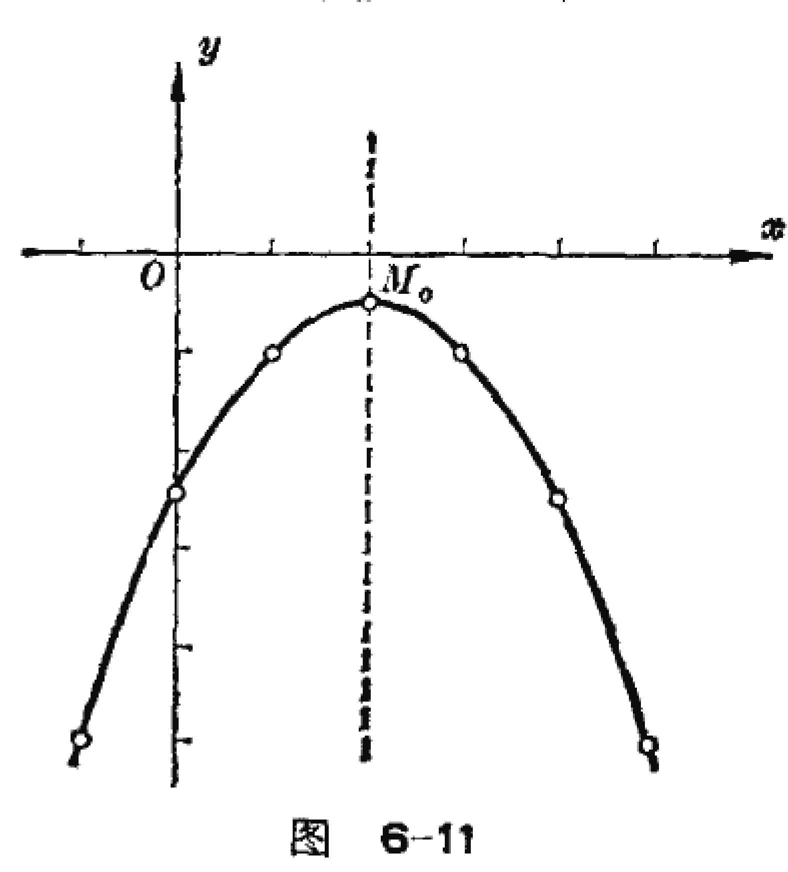


图 6-11

五、用待定系数法求抛物线方程

在实际问题中，往往要求抛物线通过某些已知点，或更一般地要求抛物线具有某些几何特性. 这样，为了得到抛物线

的方程，我们通常采用待定系数法．下面举几个例子．

［例 7］ 已知抛物线的对称轴平行于 y 轴，顶点在$(4, 3)$，以及抛物线上一点$(5, 7)$，求它的方程．

解：因为抛物线的对称轴平行于 y 轴，顶点在$(4, 3)$，因此它的方程可以写为

$$y-3=a(x-4)^2,$$

其中 a 为待定系数，它可以根据抛物线通过已知点 $(5, 7)$ 这一条件来确定．

因为点$(5, 7)$在抛物线上，所以它应该满足抛物线方程，于是

$$7-3=a(5-4)^2,$$

解得

$$a=4.$$

这样，我们得到所求方程为

$$y-3=4(x-4)^2,$$

即

$$y=4x^2-32x+67.$$

［例 8］ 已知抛物线的对称轴平行于 y 轴，以及抛物线上三点 $A(-3, -2)$，$B(-1, -4)$ 和 $C(1, 2)$，求抛物线的方程．

解：因为抛物线的对称轴平行于 y 轴，所以它的方程可写为

$$y=ax^2+bx+c,$$

其中 a, b, c 为三个待定系数．由于 A, B, C 三点在抛物线上，所以它们的坐标应满足上面方程．将 A, B, C 的坐标分别代入方程，得到关于 a, b, c 的一个三元一次方程组

$$-2=9a-3b+c,$$

$$-4=a-b+c,$$
$$2=a+b+c.$$

解这方程组得 $a=1$, $b=3$, $c=-2$. 从而得到抛物线的方程为

$$y=x^2+3x-2.$$

小　　结

1. 到一定点和到一定直线的距离相等的动点的轨迹称为抛物线，这定点称为抛物线的焦点，定直线称为抛物线的准线.

2. 方程

$$y=ax^2$$

称为抛物线的标准方程. 它表示以原点为顶点，以 y 轴为对称轴，焦点在 $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ 的抛物线. 当 $a>0$ 时抛物线开口向上，当 $a<0$ 时开口向下，$|a|$ 愈大开口愈窄.

3. 方程

$$x=ay^2$$

也是抛物线的标准方程，它所表示的抛物线，顶点在坐标原点，焦点$\left(\frac{1}{4a}, 0\right)$在对称轴 x 轴上.

4. 抛物线 $y=ax^2$ 在其上一点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的切线斜率为 $k=2ax_0$，切线方程为

$$y+y_0=2ax_0x.$$

5. 过抛物线上一点并与抛物线在该点的切线垂直的直线称为抛物线的法线，法线平分该点焦径与平行于对称轴的直线所夹的角(焦径是曲线上的点与焦点所连线段).

6. 抛物线的光学性质：由放置在抛物线焦点处的点光源

发出的光线经抛物线反射后成为一束和抛物线对称轴平行的光线.

7. 二次三项式

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$

表示一条抛物线,它的对称轴是平行于 y 轴的直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$,它的顶点坐标为 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ c-\dfrac{b^2}{4a}\right)$.

习　题

1. 已知抛物线的焦点 F 和准线 l,求它的方程:

(1) $F(0,4)$, l: $y=-2$;　(2) $F(4,0)$, l: $x=-2$;

(3) $F(2,-6)$, l: $y=-4$;　(4) $F(-2,-3)$, l: $x=1$.

2. 求下列抛物线的焦点:

(1) $y=\dfrac{3}{5}x^2$;　(2) $\dfrac{3}{5}y=-x^2$;

(3) $3x=-5y^2$;　(4) $3x^2=-5y$.

3. 求下列抛物线的对称轴、顶点,并作出图形:

(1) $y=\dfrac{1}{4}x^2$;　(2) $8y=x^2$;

(3) $y^2=2x$;　(4) $y^2=-4x$;

(5) $y^2=-2x$;　(6) $x=2y^2$.

4. 比较下列各组抛物线开口的宽窄:

(1) $y=3x^2$ 与 $y=4x^2$;

(2) $y=-3x^2$ 与 $y=-4x^2$;

(3) $2x^2=-3y$ 与 $3x^2=-2y$.

5. 求以原点为顶点并满足下列条件的抛物线方程,画出它们的图形:

(1) 以 x 轴为对称轴,焦点在 $(1,0)$;

(2) 以 y 轴为对称轴,焦点在 $(0,1)$.

6. 求抛物线 $y^2=16x$ 在点 $(1,4)$ 的切线方程.

7. 求经过点 $(0,-1)$ 且与抛物线 $x^2=4y$ 相切的直线方程.

8. 工地上照明灯的反射镜面是抛物面,生成这抛物面的抛物线方程为

$$y^2=60x,$$

问灯泡应装在什么位置,才能使照明灯发出一束平行光线?

9. 已知抛物线的对称轴平行于 y 轴, 其顶点在$(1, -2)$, 焦点在$(1, 2)$, 求抛物线方程.

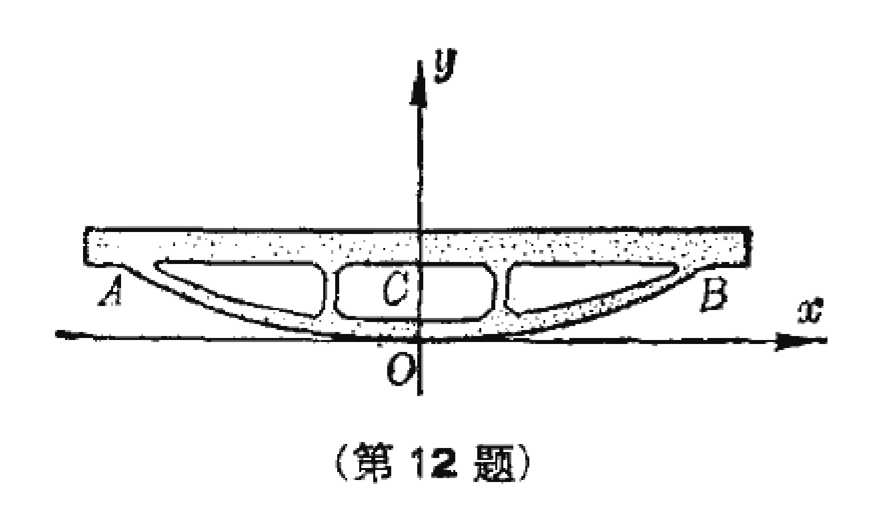
10. 已知抛物线的对称轴平行于 x 轴,其顶点在 $(3, 2)$,焦点在 $(0, 2)$, 求抛物线方程.

11. 画出下列抛物线的图形,并指出它们的顶点和对称轴:

(1) $y=x^2-3x-2$;　　(2) $y=1-2x-3x^2$;

(3) $x=\frac{1}{2}y^2+3y+\frac{3}{2}$;　　(4) $x=\frac{1}{4}y^2-2y+1$.

12. 鱼腹式吊车梁下部做成抛物线形状,已知 $AB=6$ 米, $OC=0.7$ 米, 求抛物线方程.



(第 12 题)

13. 探照灯灯口直径为 80 厘米, 深度为 10 厘米, 问灯泡应装在什么位置上?

14. 已知抛物线的对称轴平行于 y 轴, 抛物线上三个点的坐标为 $(-2, 13)$, $(2, 5)$和$(3, 8)$, 求抛物线的方程.

15. 已知抛物线的对称轴平行于 x 轴, 抛物线上三个点的坐标为 $(-5, 0)$, $(-3, -1)$和$(-11, 1)$, 求抛物线的方程.

第二节　椭　　圆

一、椭圆的定义和标准方程

椭圆是我们很熟悉的图形,例如载油车上贮油筒(图6-12)

的截口，人造地球卫星运行的轨道，某些机械零件的外形等都是椭圆．又如一个平面和圆柱面斜交时的截口也是一个椭圆．工人师傅为了在钢板上画椭圆，常采用下述方法：在钢板上取定两点，拿一条定长的绳子，将它的两端固定在所取定的两点上，用笔尖把绳子拉紧慢慢移动，笔尖就在钢板上画出一个椭圆（图 6-13）．**“理论的基础是实践，又转过来为实践服务。”**上述作法正是椭圆概念的实践基础．据此我们给出椭圆的定义如下：

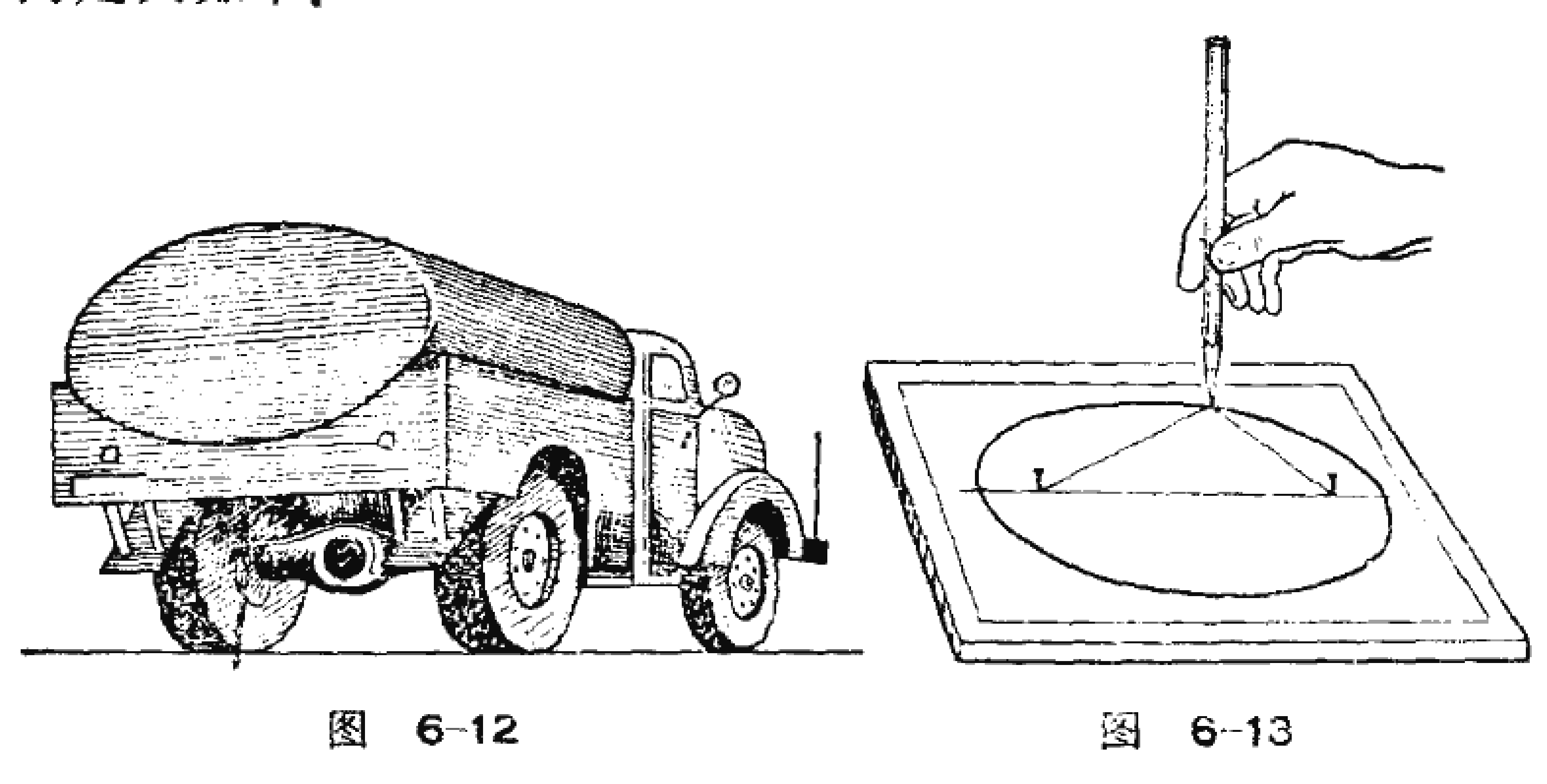


图 6-12　　　　图 6-13

定义　到两定点的距离之和等于定长的动点的轨迹称为椭圆，这两定点称为椭圆的焦点，两焦点的距离称为焦距．

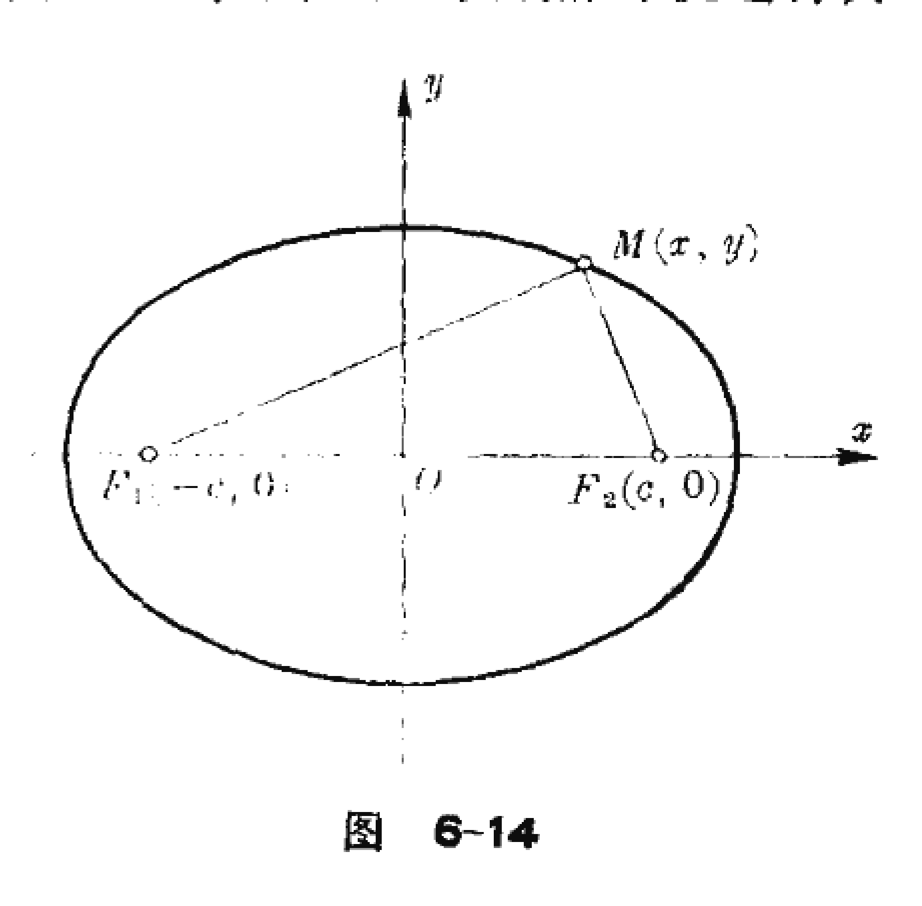


图 6-14

下面推导椭圆的方程．

如图 6-14 所示，以经过焦点 F_1 和 F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴建立

直角坐标系.

记两焦点间的距离为 $2c(c>0)$, 即

$$F_1F_2=2c,$$

那末两焦点的坐标为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. 根据椭圆的定义, 椭圆上任一点 $M(x, y)$ 到两焦点 F_1 和 F_2 的距离之和为定长, 记为 $2a(a>0)$, 则有

$$MF_1+MF_2=2a.$$

因为

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

所以

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

把上式左边第二个根式移到右边, 然后两边平方得

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

整理得

$$cx-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

再把等式两边平方, 合并同类项得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

因为三角形两边之和大于第三边: $MF_1+MF_2>F_1F_2$, 即 $2a>2c$, 于是 $a^2-c^2>0$, 记

$$a^2-c^2=b^2,$$

上式就成为

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0). \tag{4}$$

可以验证, 坐标满足上述方程的点必定在椭圆上, 所以式(4)是椭圆的方程, 称为椭圆的标准方程.

方程(4)所表示的椭圆，它上面的点到两焦点的距离之和为定长 $2a$，焦点在 x 轴上，坐标分别为 $(-c, 0)$ 和 $(c, 0)$，其中

$$c=\sqrt{a^2-b^2}.$$

二、椭圆的图形

我们根据标准方程(4)来讨论椭圆的几何性质.

1. 对称性

椭圆的标准方程中 x, y 都以平方项出现，因此式(4)所表示的椭圆既关于 y 轴对称，又关于 x 轴对称，即 x 轴和 y 轴都是这椭圆的对称轴. 同时，这椭圆也关于原点中心对称. 我们把椭圆的对称中心称为椭圆的中心.

2. 顶点与长短轴

椭圆与对称轴的交点称为椭圆的顶点.

在标准方程(4)中令 $x=0$，得 $y=\pm b$，即这椭圆在 y 轴上的顶点为 $B_1(0, -b)$ 和 $B_2(0, b)$. 同样，这椭圆在 x 轴上的顶点为 $A_1(-a, 0)$ 和 $A_2(a, 0)$.

线段 A_1A_2 的长等于 $2a$，线段 B_1B_2 的长等于 $2b$，由于 $b^2=a^2-c^2$，所以 $a>b$，因此称 A_1A_2 为椭圆的长轴，B_1B_2 为椭圆的短轴，a 为长半轴，b 为短半轴. 焦点在长轴上.

从方程(4)我们有 $x=\pm\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$，$y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，因此 $|x|\leqslant a$，$|y|\leqslant b$. 这说明，椭圆的图形限制在边长为 $2a$ 和 $2b$ 的一个矩形之中.

根据上面的讨论，再描出几个点，就可画出方程(4)的椭圆图形，如图 6-15 所示.

类似地，我们可以得到中心在原点，焦点在 y 轴上的椭圆的标准方程

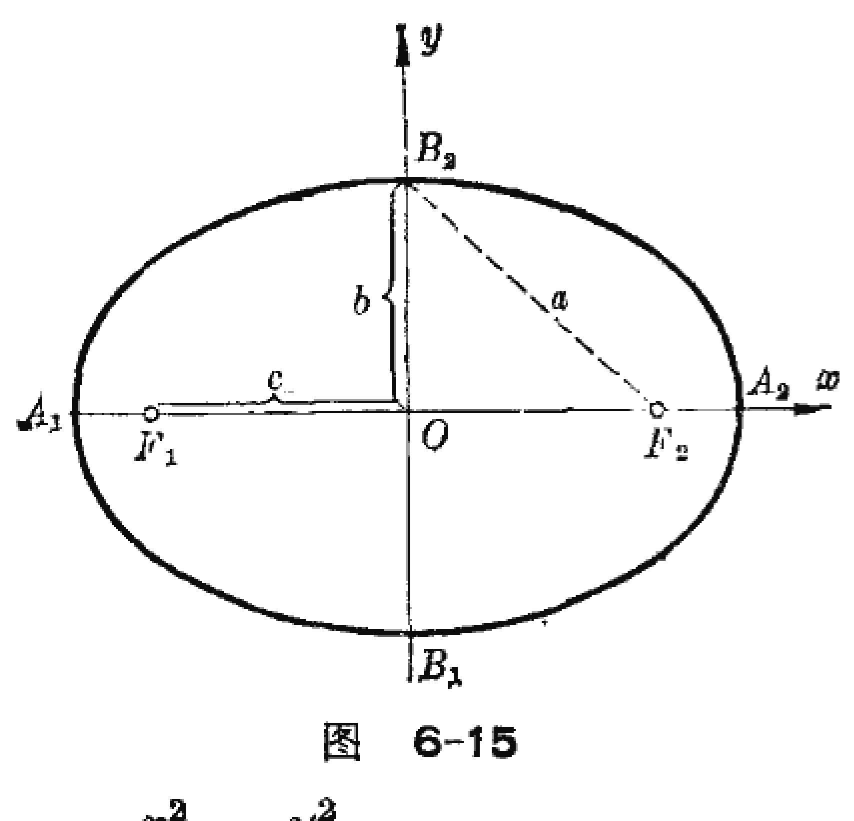


图 6-15

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>b>0).$$

[例 1] 已知椭圆方程为

$$25x^2+16y^2=400,$$

作出它的图形,并求出焦点坐标.

解: 把所给方程化为标准形式

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{5^2}=1,$$

由此可知，这椭圆的对称轴为坐标轴，中心为原点，顶点在 $(-4, 0), (4, 0), (0, -5), (0, 5)$ 处.

运用描点法作出椭圆在第 I 象限的图形,然后利用对称性,就可画出整个椭圆的图形(图6-16).

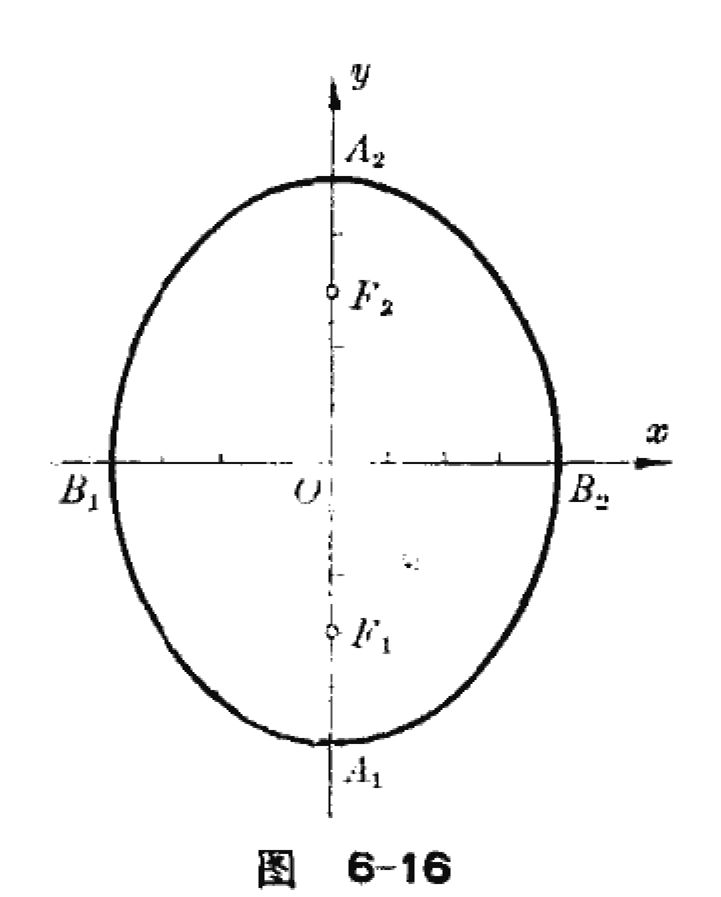


图 6-16

这椭圆的焦点在 y 轴上,长半轴 $a=5$, 短半轴 $b=4$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=3$, 所以焦点坐标为 $F_1(0, -3)$ 和 $F_2(0, 3)$.

[例 2] 我国第一颗人造地

球卫星的运行轨道是一个椭圆，这椭圆有一个焦点在地球的中心，卫星的近地点距地球表面 439 公里，远地点距地球表面 2384 公里（卫星轨道上离地球最近和最远的点分别称为近地点和远地点）．地球半径为 6378 公里，求卫星的轨道方程．

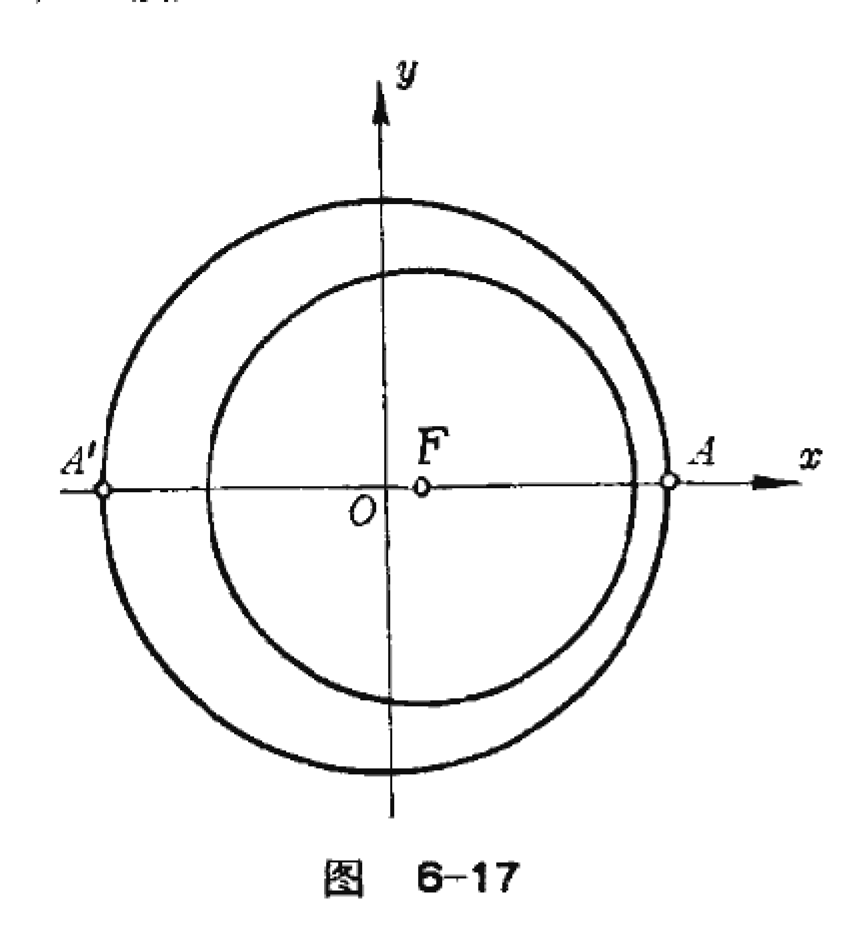


图 6-17

解：如图 6-17，设 F 是地球中心，A 为近地点，A' 为远地点．以直线 $A'A$ 为 x 轴，线段 $A'A$ 的垂直平分线为 y 轴，建立坐标系．

近地点和远地点到地心的距离分别为

$$AF=439+6378=6817\ （公里），$$

$$A'F=2384+6378=8762\ （公里），$$

所以

$$a=\frac{AF+A'F}{2}=\frac{6817+8762}{2}=7789.5,$$

$$c=OA-FA=7789.5-6817=972.5,$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=7728,$$

于是，卫星运行的轨道方程为

$$\frac{x^2}{7789.5^2}+\frac{y^2}{7728^2}=1.$$

［例 3］ 在图 6-18 中，椭圆的两条对称轴分别平行于坐标轴，且 $A_1A_2=6$，$B_1B_2=4$，椭圆中心为 $O'(4, 3)$，求椭圆在坐标系 Oxy 中的方程．

解：这里，椭圆的对称轴不是坐标轴，而是平行于坐标轴

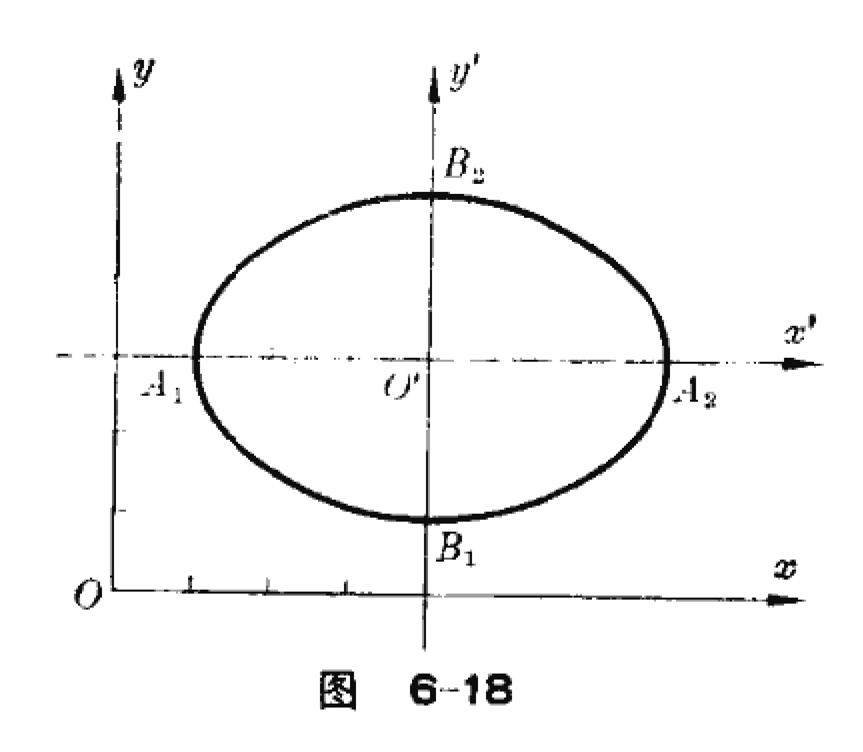


图 6-18

的两条直线．为了利用椭圆的标准方程，我们作移轴变换，将坐标系 Oxy 的原点平移到 O' 点，得到坐标系 $O'x'y'$（图 6-18）．显然，椭圆在 $O'x'y'$ 中的方程为

$$\frac{x'^2}{3^2}+\frac{y'^2}{2^2}=1.$$

把移轴公式

$$x'=x-4,\ \ y'=y-3$$

代入上面方程，即得椭圆在 Oxy 中的方程

$$\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1,$$

展开并化简得

$$4x^2+9y^2-32x-54y+109=0.$$

一般地，中心在 $(x_0,\ y_0)$，对称轴平行于坐标轴的椭圆方程有如下形式：

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \tag{5}$$

[例 4]　已知椭圆方程为

$$x^2-4x+2y^2-4y+2=0,$$

试画出它的图形．

解：所给方程与例 3 所得方程形式一样，为了作图，我们

把它化为(5)的形式.

先配方得

$$(x-2)^2+2(y-1)^2=4,$$

两边除以 4, 得

$$\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(y-1)^2}{(\sqrt{2})^2}=1.$$

由此可见, 椭圆的中心为(2, 1), 长、短轴分别平行于 x 轴和 y 轴, 且长半轴 $a=2$, 短半轴 $b=\sqrt{2}$, 据此可以作出它的图形如图 6-19.

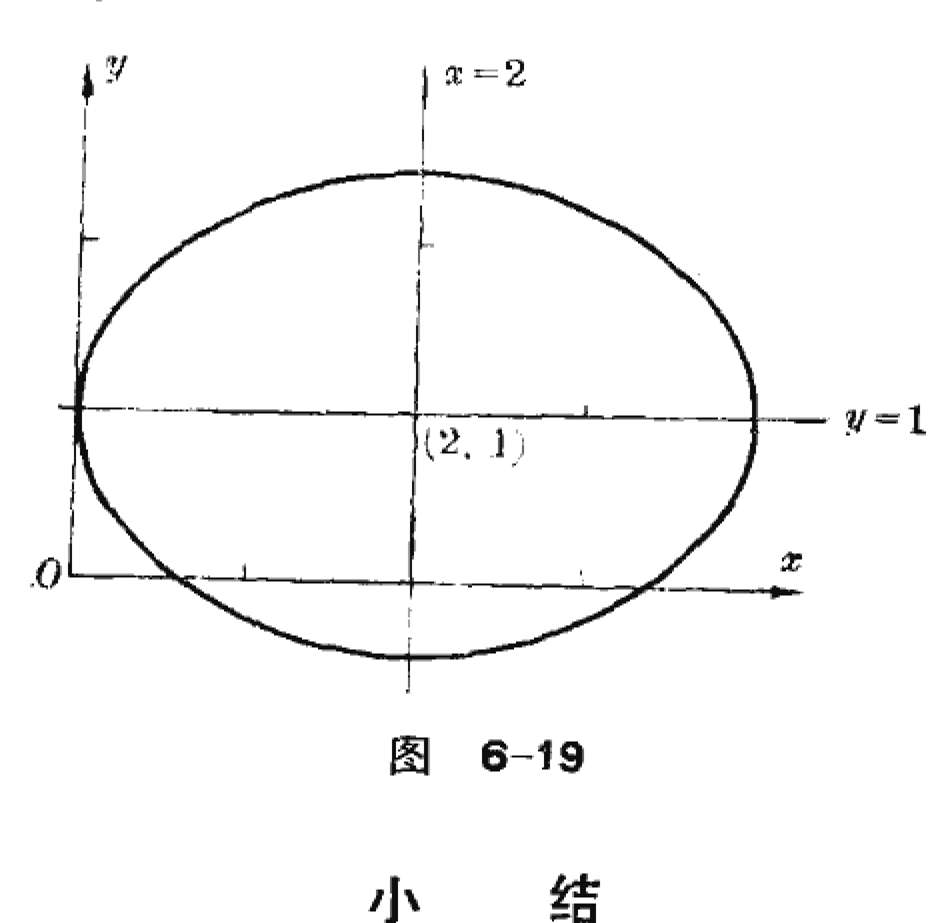


图 6-19

小 结

1. 到两定点的距离之和等于定长的动点的轨迹称为椭圆, 这两定点称为椭圆的焦点.

2. 方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

是椭圆的标准方程. 它的图形以原点为中心; 以坐标轴为对称轴, 顶点为 $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b)$; 长半轴 a, 短半轴 b; 两焦点在 x 轴上, 其坐标为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$,

其中$c=\sqrt{a^2-b^2}$.

方程

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>b>0)$$

也是椭圆的标准方程，但它的焦点在y轴上，坐标为$F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$.

3. 方程

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

表示一个中心在(x_0, y_0)，对称轴平行于坐标轴的椭圆.

习　题

1. 已知两个定点间的距离为8，动点到这两个定点的距离之和为10，取适当的坐标系，求动点轨迹的方程.
2. 画出下列椭圆的图形，并求焦点与顶点坐标:

   (1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;　　(2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;

   (3) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$;　　(4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{64}=1$.
3. 求中心在原点，长轴为50，短轴为30，焦点在x轴上的椭圆的方程.
4. 我国第二颗人造地球卫星运行的轨道是以地球的中心为一个焦点的椭圆，远地点离地球表面1826公里，近地点离地球表面266公里，地球半径约为6378公里. 求卫星的轨道方程，并画出其大致图形.
5. 彗星“紫金山一号”是我国紫金山天文台发现的，它的运行轨道是以太阳为一个焦点的椭圆. 测得彗星的近日点和远日点到太阳的距离分别为1.486天文单位和5.563天文单位. 写出彗星的轨道方程（1天文单位=1.5亿公里).
6. 作出下列椭圆的图形，并写出焦点与顶点坐标:

   (1) $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$;　(2) $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$.

7. 设椭圆中心在$(\sqrt{5}, 0)$，焦点在x轴上，长轴为8，焦距为6，求椭圆的方程.

8. 作出下列椭圆的图形：

(1) $x^2+2x+2y^2-8y+8=0$;

(2) $2x^2+8x+7y^2-14y+1=0$.

第三节　双　曲　线

一、双曲线的定义和标准方程

上节我们讨论了到两定点的距离之和等于定长的动点的轨迹——椭圆，这一节我们来讨论到两定点的距离之差等于定长的动点的轨迹.

定义　到两定点的距离之差等于定长的动点的轨迹称为双曲线，这两定点称为双曲线的焦点.

双曲线在实践中也有广泛的应用，例如，涡轮喷气发动机中压气机的超音速叶片的型面常应用双曲线，飞机和轮船的无线电导航系统要利用求双曲线交点的办法来定位.

现在来推导双曲线的方程.

与椭圆的情形相同，以经过焦点F_1和F_2的直线为x轴，线段F_1F_2的垂直平分线为y轴，建立直角坐标系(图6-20).

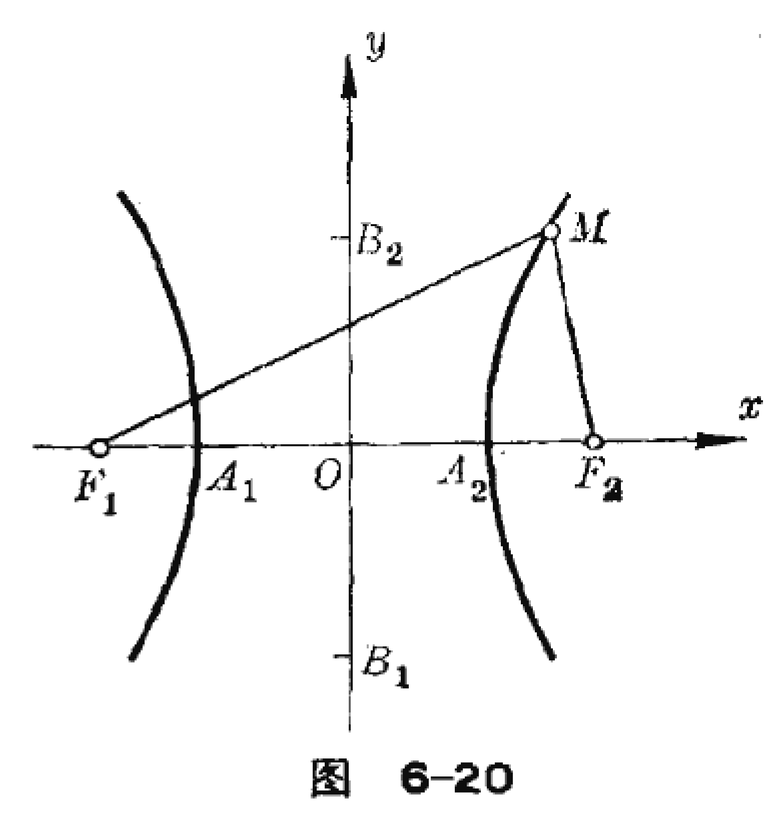


图　6-20

记双曲线两焦点间距离为$2c(c>0)$，那末焦点坐标为$F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$. 根据定义，双曲线上任一点$M(x, y)$

到两焦点 F_1, F_2 的距离之差为定长，记为 $2a(a>0)$，则

$$MF_1-MF_2=\pm 2a.$$

当 $MF_1>MF_2$ 时，$MF_1-MF_2=2a$，这表示点 M 在 y 轴的右边；当 $MF_1<MF_2$ 时，$MF_1-MF_2=-2a$，这表示点 M 在 y 轴的左边.

由于

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

于是得到

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

象导出椭圆的标准方程那样，上述方程经化简后为

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

因为三角形两边之差小于第三边：$|MF_1-MF_2|<F_1F_2$，即 $2a<2c$，于是 $c^2-a^2>0$，记

$$c^2-a^2=b^2,$$

上式就成为

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\quad b>0).\tag{6}$$

可以验证，坐标满足(6)的点必在双曲线上，所以(6)是双曲线的方程，称为双曲线的标准方程.

方程(6)所表示的双曲线，它上面的点到两焦点的距离之差为 $2a$，焦点在 x 轴上，它们的坐标分别为 $(-c,\ 0)$ 和 $(c,\ 0)$，其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

二、双曲线的图形

我们根据标准方程(6)来讨论双曲线的几何性质.

1. 对称性

双曲线的标准方程 (6) 只含有 x, y 的平方项，因此这双曲线关于坐标轴和坐标原点对称，即它的对称轴为 x 轴和 y 轴，对称中心为原点. 我们把双曲线的对称中心称为双曲线的中心.

2. 顶点与虚、实轴

双曲线与对称轴的交点称为双曲线的顶点.

在 (6) 中令 $y=0$, 得 $x=\pm a$, 故双曲线在 x 轴上的顶点为 $A_1(-a, 0)$和 $A_2(a, 0)$. 但在方程(6)中令 $x=0$ 时，解不出实根，因此双曲线与 y 轴不相交.

连接双曲线两顶点的线段 A_1A_2 称为实轴，它的长等于 $2a$. 与双曲线不相交的对称轴上两点 $B_1(0, -b)$ 和 $B_2(0, b)$ 所连线段 B_1B_2 称为虚轴，它的长等于 $2b$; a 为实半轴，b 为虚半轴.

将方程(6)变形，解出 y，我们有

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

从此看出，在(6)式所表示的双曲线上，y 可以取任何实数值，但 x 的值必须适合 $|x|\geqslant a$. 这就是说，如果过 A_1, A_2 画两条平行于 y 轴的直线，则双曲线的图形就不能处在这两条直线所夹的范围之中，因此，双曲线由互相隔开的两支组成. 随着 $|x|$ 的无限增大，$|y|$ 也无限增大，所以双曲线的两支都是无限伸展的.

根据上面的讨论，描出一些点，就可以画出双曲线的图形如图 6-21.

3. 渐近线

上面说过，当 $|x|$ 无限增大时，双曲线在 x 轴的两侧无限

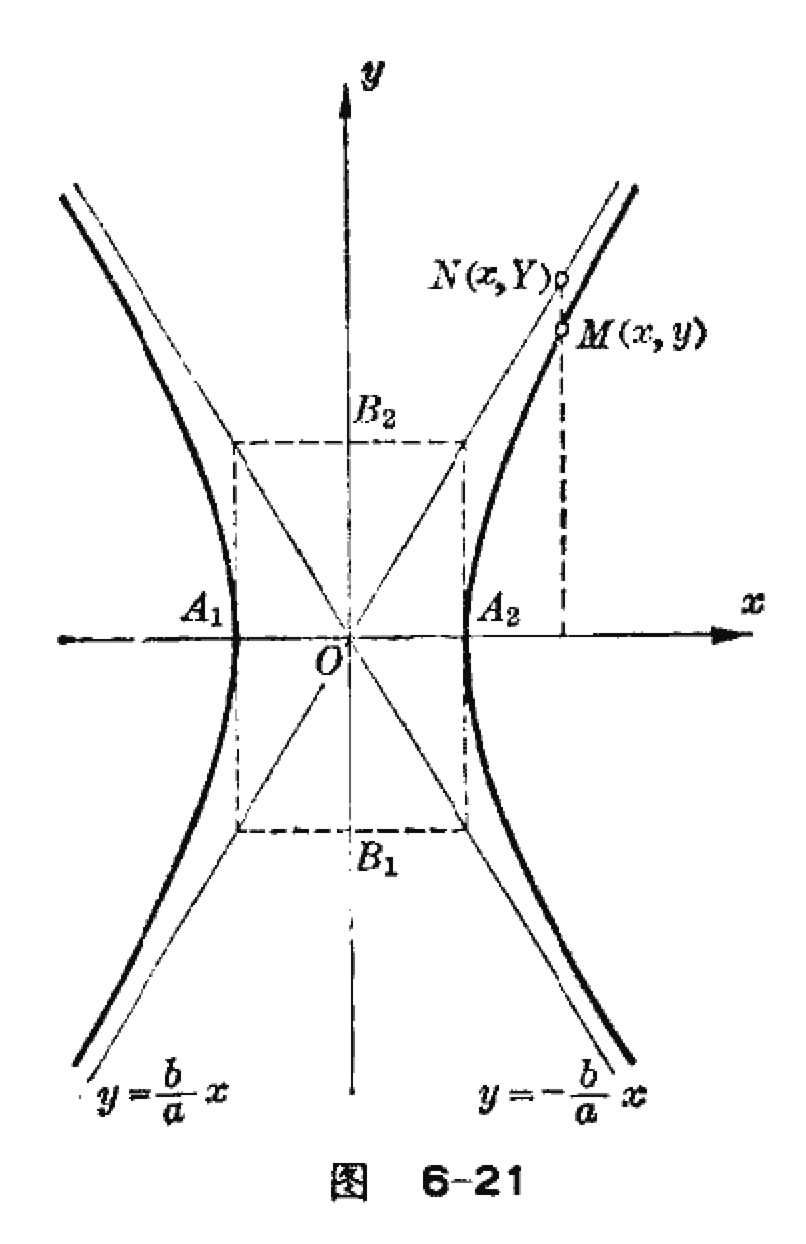


图 6-21

伸展，现在来研究它的伸展趋势.

由于对称性，可以先在第Ⅰ象限讨论. 这时由方程(6)得

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

当 x 无限增大时，$\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$ 趋近于1，这就启发我们把双曲线在第Ⅰ象限内的部分与直线

$$y=\frac{b}{a}x$$

进行比较（图 6-21）. 为此，考虑该直线和双曲线上具有同一横坐标 x 的点 $N(x, Y)$ 和 $M(x, y)$，它们之间的距离为

$$MN=Y-y.$$

由于 M 点在双曲线上，$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$，而 N 点在直线上，$Y=\frac{b}{a}x$，因此

$$MN=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

当横坐标 x 无限增大时，上式中分母也无限增大，但分子为常数 ab，所以分数值 MN 趋近于 0，即双曲线越来越接近于直线，但永不相交.

利用对称性可以得知其他象限的情况. 总之，当 $|x|$ 无限增大时，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 与直线 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$ 无限接近但不相交，我们称这两条直线为双曲线的渐近线.

上面讨论的是焦点在 x 轴上的双曲线. 类似地，我们可以导出中心在原点，焦点在 y 轴上的双曲线的标准方程为

$$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>0,\ b>0).$$

[例 1]　分别画出下列方程的图形：

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1 \quad 与 \quad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1.$$

解：方程

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$$

表示实轴在 x 轴上，虚轴在 y 轴上，且实半轴 $a=2$，虚半轴 $b=3$ 的双曲线. 它的顶点为 $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$，渐近线为 $y=\pm\frac{3}{2}x$.

在坐标系中作出以直线 $x=-2$，$x=2$ 和 $y=-3$，$y=3$ 为边的矩形，其对角线所在的直线就是渐近线．据此可以作出所给双曲线的图形如图 6-22 所示．

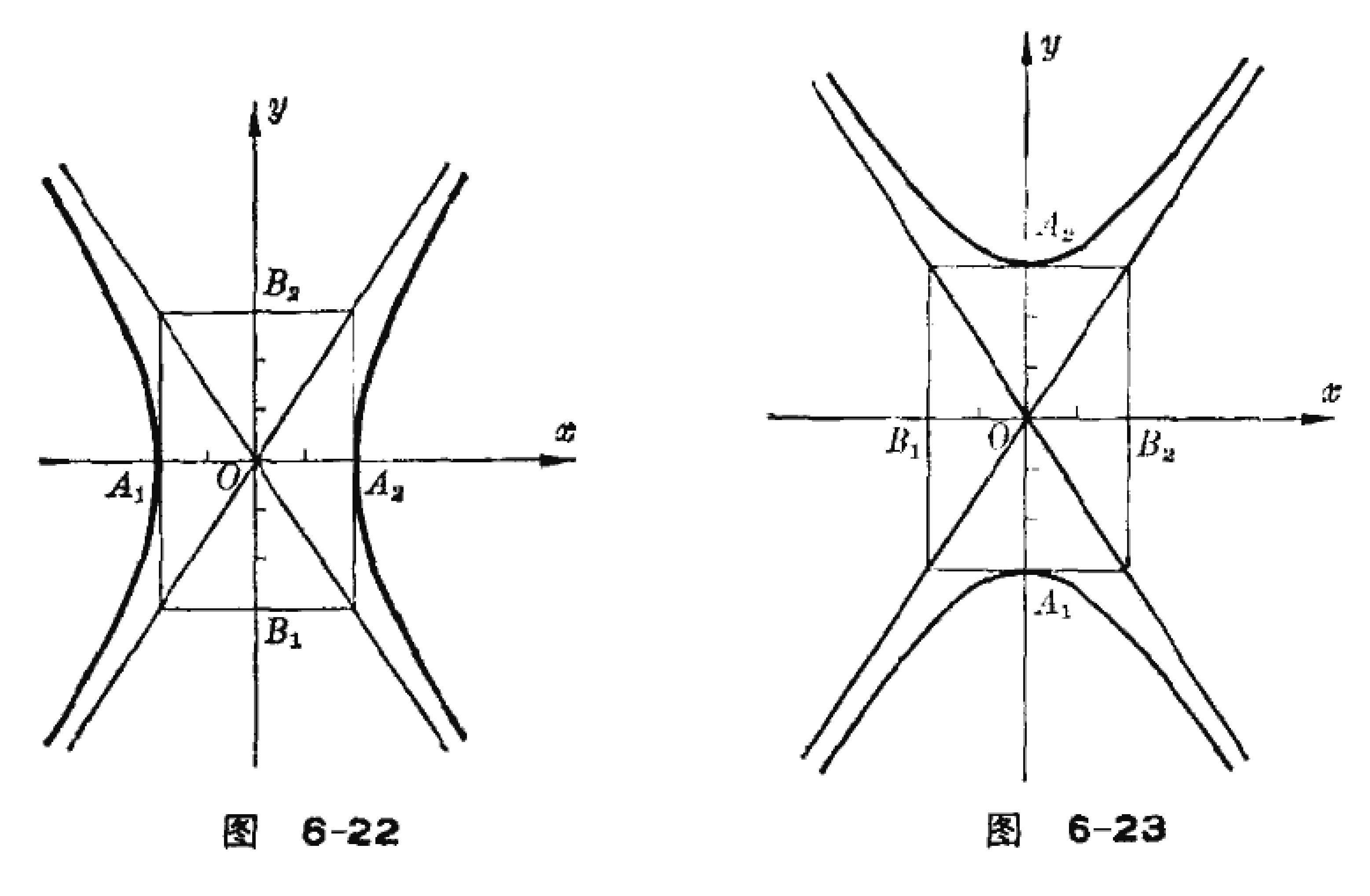


图 6-22　　　　图 6-23

方程

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1$$

即

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,$$

表示实轴在 y 轴上，虚轴在 x 轴上，且实半轴为 3，虚半轴为 2 的双曲线，它的顶点为 $A_1(0,\ -3)$ 和 $A_2(0,\ 3)$，渐近线为 $y=\pm\frac{3}{2}x$．据此可以作出它的图形如图 6-23 所示．

[例 2]　双曲线型自然通风塔的通风筒是由双曲线绕其虚轴旋转一周生成的曲面（图 6-24），它的最小半径为 11.61 米，上口半径为 13 米，下底半径为 24.56 米，高 55 米，求在图 6-24 所示的坐标系中双曲线的方程．

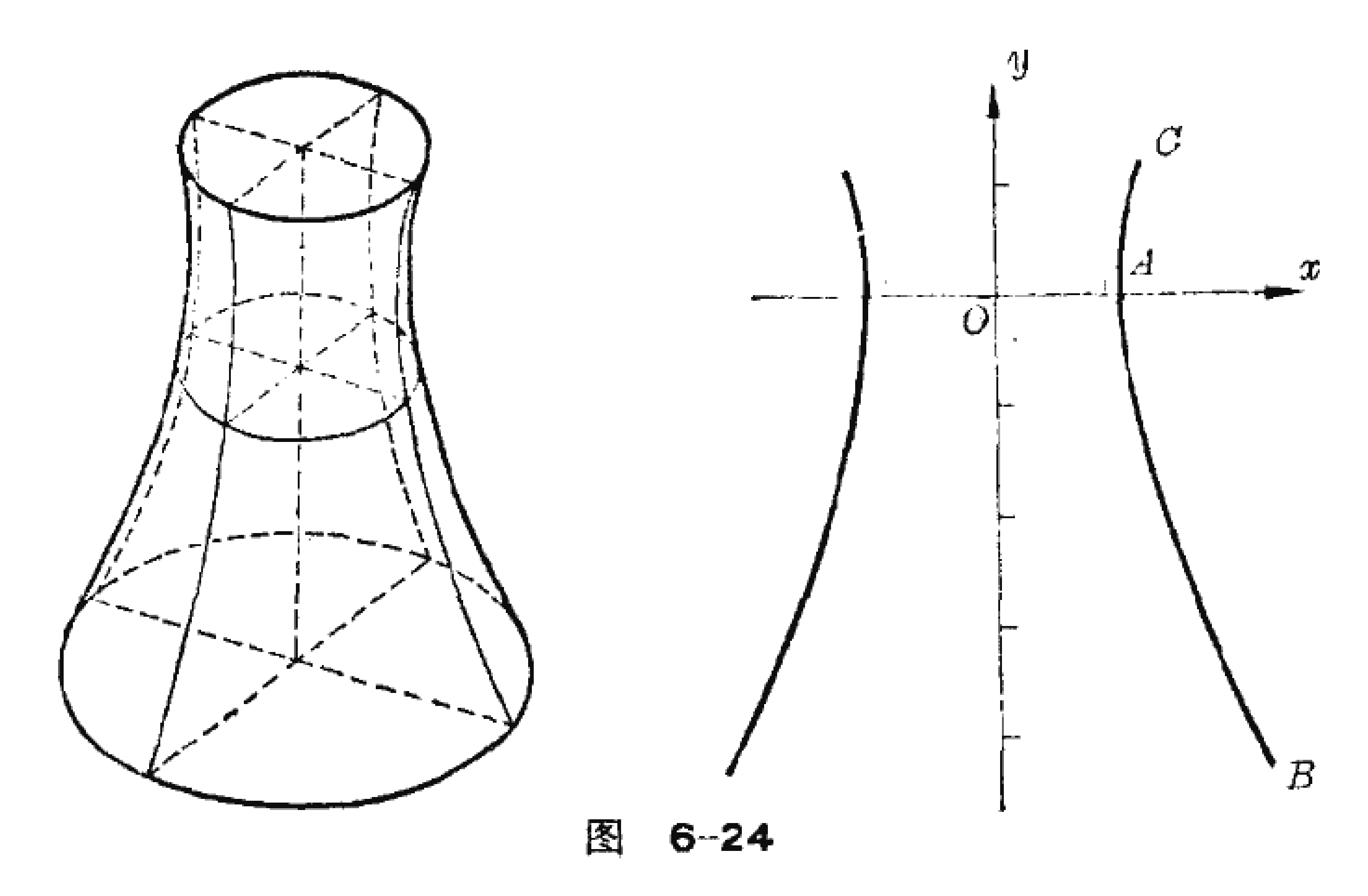


图 6-24

解：在图 6-24 的坐标系中，双曲线的中心在原点，对称轴合于坐标轴，所以它的方程取标准形式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

因顶点 A 旋转生成的圆，半径最小，所以 $a=11.61$. 下面求 b.

设 B 是双曲线上位于通风筒下底上的一点，它的纵坐标为 y_1，C 是双曲线上位于通风筒上口上的一点，它的纵坐标为 y_2，因为 B，C 点在双曲线上，所以

$$\frac{24.56^2}{11.61^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{13^2}{11.61^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1,$$

解得

$$y_1=-\frac{b}{11.61}\sqrt{24.56^2-11.61^2}\approx-1\ 864b,$$

$$y_2=\frac{b}{11.61}\sqrt{13^2-11.61^2}\approx0.5037b.$$

因为塔高 55 米，所以 $y_2-y_1=55$，即

$$0.5037b-(-1.864b)=55,$$

解得

$$b\approx 23.23,$$

所以双曲线方程为

$$\frac{x^2}{11.61^2}-\frac{y^2}{23.23^2}=1.$$

前面我们分别研究了抛物线、椭圆和双曲线，发现它们的标准方程都是二元二次方程. 二元二次方程所表示的曲线称为二次曲线. 可以证明二次曲线主要是这三种曲线.

抛物线、椭圆和双曲线统称为圆锥曲线，因为它们都可以用不经过圆锥顶点的平面去截圆锥面而得到(图 6-25). 设圆锥面的半顶角为 α，截面和圆锥面的轴所夹的角为 θ，则

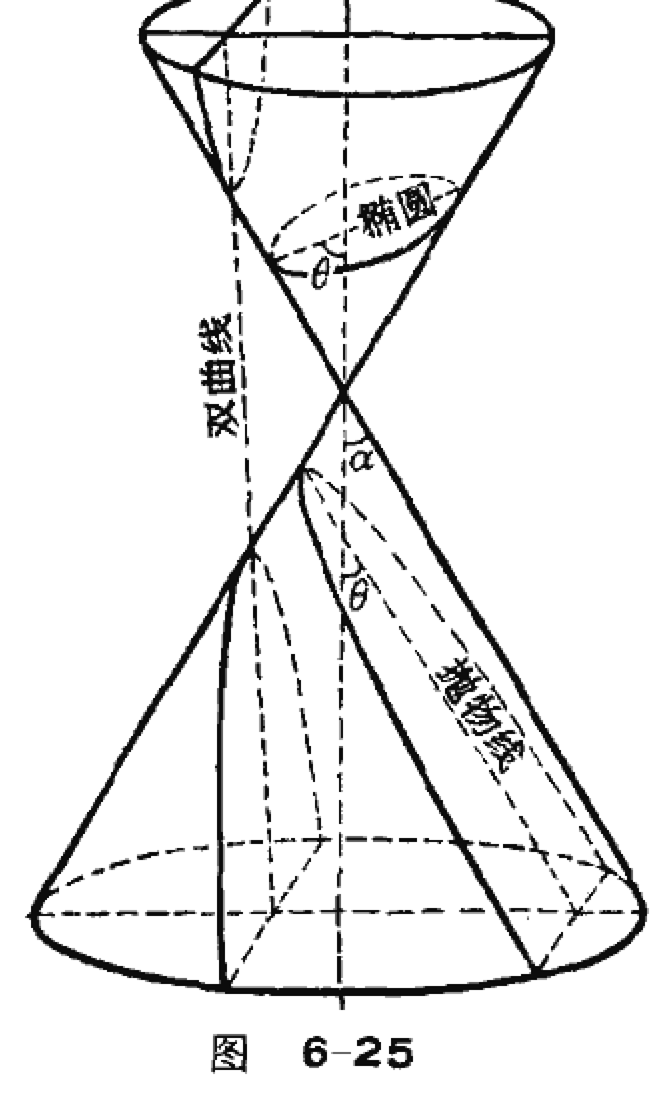


图 6-25

(1) 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，截口为圆；

(2) 当 $\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，截口为椭圆；

(3) 当 $\theta=\alpha$ 时，截口为抛物线；

(4) 当 $0\leqslant\theta<\alpha$ 时，截口为双曲线.

这里，我们看到了量变引起质变的一个具体事例. 由于截面对圆锥的相对位置的变化，引起了截口形状的改变. 当角 θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 不断减小到 0 时，截口的形状也由圆依次转化为椭圆、抛物线、双曲线. 因此我们可以说，抛物线、椭圆和双曲线既是互相区别的，又是互相联系的.

小　结

1. 到两定点的距离之差等于定长的动点的轨迹称为双曲线，这两定点称为双曲线的焦点.

2. 方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

是双曲线的标准方程. 它的图形以坐标轴为对称轴，中心在原点，顶点为 $A_1(-a,\ 0)$ 和 $A_2(a,\ 0)$，实轴在 x 轴上，实半轴为 a；虚轴在 y 轴上，虚半轴为 b. 焦点为 $F_1(-c,\ 0)$ 和 $F_2(c, 0)$，其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，渐近线为 $y=\frac{b}{a}x$ 和 $y=-\frac{b}{a}x$.

方程

$$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

也是双曲线的标准方程，但此双曲线的实轴在 y 轴上.

习　题

1. 求下列双曲线的顶点和焦点的坐标以及渐近线的方程，并画出它们的图形：

   (1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$；　　(2) $5x^2-5y^2=121$；

   (3) $25y^2-144x^2=36$.

2. 求中心在原点而适合下列条件的双曲线方程，并画出它们的图形：

   (1) 焦点在 x 轴上，焦点间距离为 14，顶点间距离为 12；

   (2) 实轴在 y 轴上，且经过 $(-3,\ 2\sqrt{7})$ 和 $(-6\sqrt{2},\ -7)$ 两点.

3. 在建造双曲线型自然通风塔时，要知道塔在各个高度处截圆的半径. 在例 2 中已求出双曲线的方程，试由此计算该塔在高度为 h 处的截圆半径 r.

4. 设双曲线的实轴平行于 x 轴，中心在 (x_0, y_0)，实半轴为 a，虚半轴为 b，求双曲线的方程.

5. 已知双曲线的焦点为 $(-8, 2)$ 和 $(2, 2)$，又知实半轴为 3，虚半轴为 4，求它的方程.

6. 求下列双曲线的顶点坐标与渐近线方程，并作图：

(1) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{16}=1$; (2) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{16}=-1$;

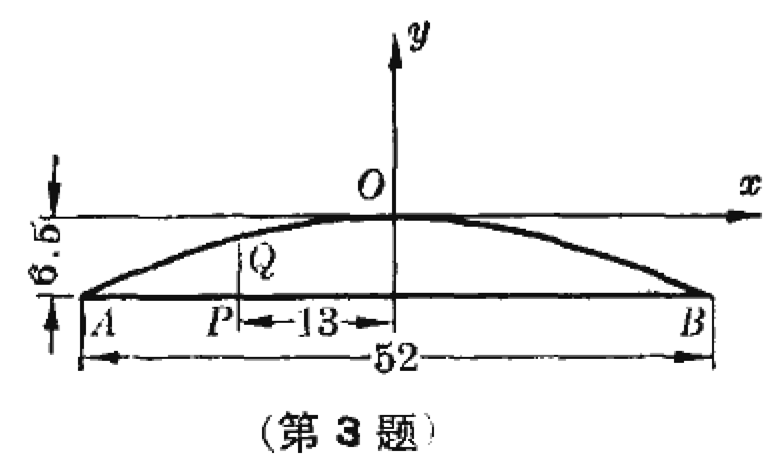
(3) $x^2+2x-y^2+2y=9$; (4) $-x^2+2x+y^2-4y=12$.

复 习 题

1. 总结抛物线、椭圆和双曲线的定义、标准方程和图形特征.

2. 求抛物线 $y^2=12x$ 与椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的交点.

3. 已知抛物线拱桥的跨度 AB 为 52 米，高度为 6.5 米，在建造时需要在 AB 间每隔 1 米竖立一支柱. 试计算图中离 AB 中点 13 米处那根支柱 PQ 之长.



(第 3 题)

4. 炮弹的轨道为抛物线. 已知最大射程为 10 公里，最大高度为 0.2 公里，写出炮弹的轨道方程，并求距炮位 2 公里处炮弹的高度.

5. k 为何值时，直线 $y=kx$ 与双曲线 $4x^2-y^2=16$

(1) 相交; (2) 相切; (3) 不相交.

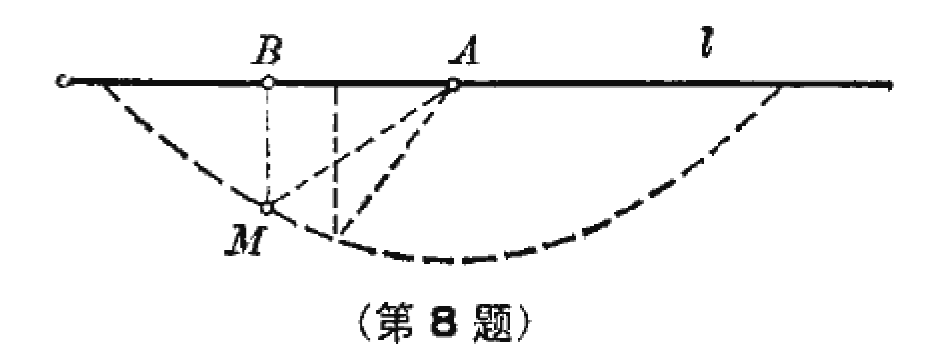
6. α 为何值时，直线 $y=(1-x)\operatorname{tg}\alpha$ 与双曲线 $-x^2+y^2\cos^2\alpha=1$ 有唯一交点(即相切)？并求切点坐标 $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

7. 求倾角为 30° 且与抛物线 $y^2=4x$ 相切的直线方程以及切点坐标.

8. 某厂在机床上加工抛物面时用到如下原理：

拖板 B 在机床的导轨 l 上移动，B 与 l 上的固定点 A 以长度为 a

的钢索联结(图中用虚线表示)，拖板 B 的移动带动了位于钢索上的 M 点(此处安装车刀)．若移动中钢索与导轨围成的三角形始终是直角三角形，求证 M 点的轨迹是一条抛物线(从而车刀的轨迹是一条抛物线)．



(第 8 题)

9．下列方程对应什么曲线，写出它们的顶点、焦点坐标；若是圆，只要写出圆心和半径；若是双曲线，再写出渐近线方程：

(1) $2(x-3)^2+y^2=1$；　　(2) $\frac{y^2}{4}-x-5=0$；

(3) $4x^2-5=36\left(1-\frac{y}{3}\right)^2$；　　(4) $a^2x^2-b^2(y+c)^2+a^2b^2=0$；

(5) $x^2\sin\alpha+y^2\cos\alpha=1\quad(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$．

10．讨论下列方程所表示的曲线：

(1) $Ax^2+2Dx+2Ey+F=0\quad(A\neq0)$；

(2) $Ax^2+Cy^2+F=0\quad(A\neq0,\ C\neq0)$；

(3) $Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0\quad(A\neq0,\ C\neq0)$．

11．一些圆经过点(0, 3)，且和直线 $y+3=0$ 相切，这些圆的圆心在什么曲线上？写出这条曲线的方程．

12．一个动点 $M(x,y)$ 到定点 $F_2(c,0)$ 的距离和它到定直线 $x=\frac{a^2}{c}$ $(a>c>0)$ 的距离之比是 $\frac{c}{a}$，求证点 M 的轨迹是椭圆．对于双曲线是否有相类似的性质？

13．证明双曲线上任意一点到两条渐近线的距离之积是常数．

14．(1) 判定方程 $\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{4-k}=1$ 当 $k<4$ 时和当 $4<k<9$ 时的轨迹各是什么曲线．

(2) 证明方程 $\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{4-k}=1$ 所表示的一族曲线有共同的焦点 $(k<9,\ k\neq4)$．

第七章　极坐标与参数方程

第一节　极　坐　标

前面两章我们讨论曲线，都是在直角坐标系中进行的.直角坐标系是最常用的一种坐标系，但它并不是用来确定平面上点的位置的唯一方法.在某些实际问题中，用这种方法不太方便，例如，炮兵指挥所向炮兵指出射击目标时，最方便的是指出目标的方位角和距离，即利用方向和距离来确定目标的位置.又如，在农村问路时，贫下中农有时这样告诉我们："朝东南方向走五里路."“朝东南”就指出了目的地的方向，“五里路”指出了离目的地有多远.**“社会实践的继续，使人们在实践中引起感觉和印象的东西反复了多次，于是在人们的脑子里生起了一个认识过程中的突变（即飞跃），产生了概念。”**人们总结社会实践中用角度和距离来确定平面上点的位置的经验，产生了极坐标系的概念.

一、极坐标系

在平面上取定一点 O 和从 O 点发出的一条射线 Ox（图7-1），再确定一个长度单位和计算角度的正向（通常取逆时针方向），这样就构成了一个极坐标系.O 点称为极点，射线 Ox 称为极轴.

图　7-1

对于平面上任意一点 M, 它的位置可以由 OM 的长度 r 和从 Ox 到 OM 的角度 θ 完全确定. 我们称 (r, θ) 为点 M 的极坐标, 记作 $M(r, \theta)$. r 称为点 M 的极径, θ 称为点 M 的极角. 由于极径表示长度, 所以 $r \geqslant 0$.

[例 1] 求极坐标为$\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$和$\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\pi\right)$的点.

解: 使极轴 Ox 绕 O 按逆时针方向转 $\frac{\pi}{4}$, 得到射线 l (图 7-2), 在 l 上取一点 P_1, 使 OP_1 的长度等于单位长的 2 倍, 这样, P_1 就是所求的极坐标为$\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$的点.

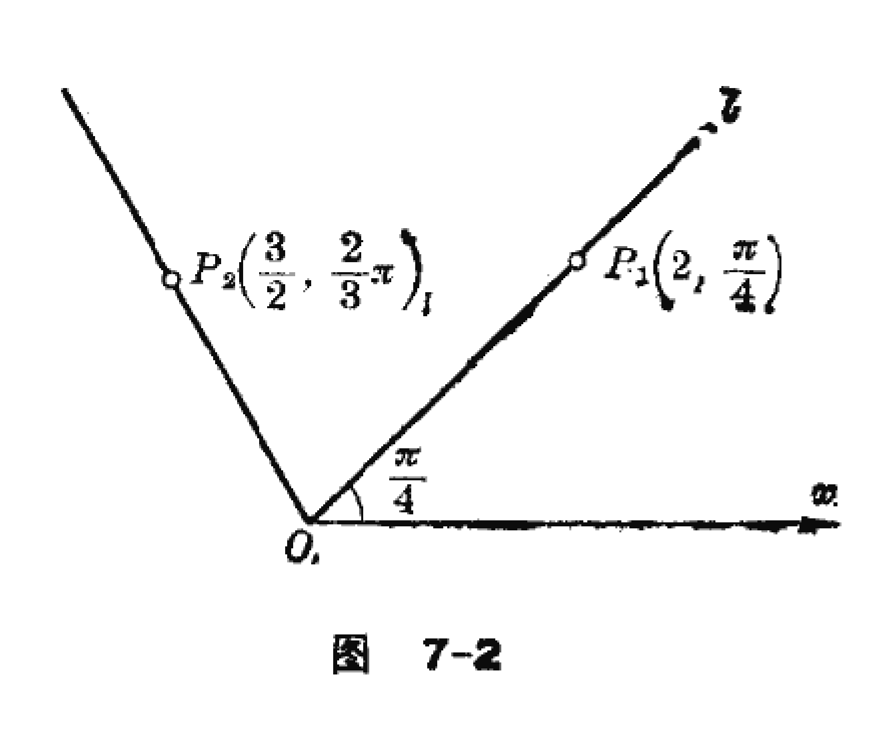


图 7-2

同样可求得极坐标为$\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\pi\right)$的点 P_2.

[例 2] 分别求点 $M_1\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$关于极轴和极点的对称点.

解: 设 $P_1(r_1, \theta_1)$ 为平面上任意一点, P_1 关于极轴、极点的对称点依次记为 $P_2(r_2, \theta_2)$、$P_3(r_3, \theta_3)$. 根据对称性有

$$r_2 = r_1, \quad \theta_2 = -\theta_1;$$
$$r_3 = r_1, \quad \theta_3 = \pi + \theta_1.$$

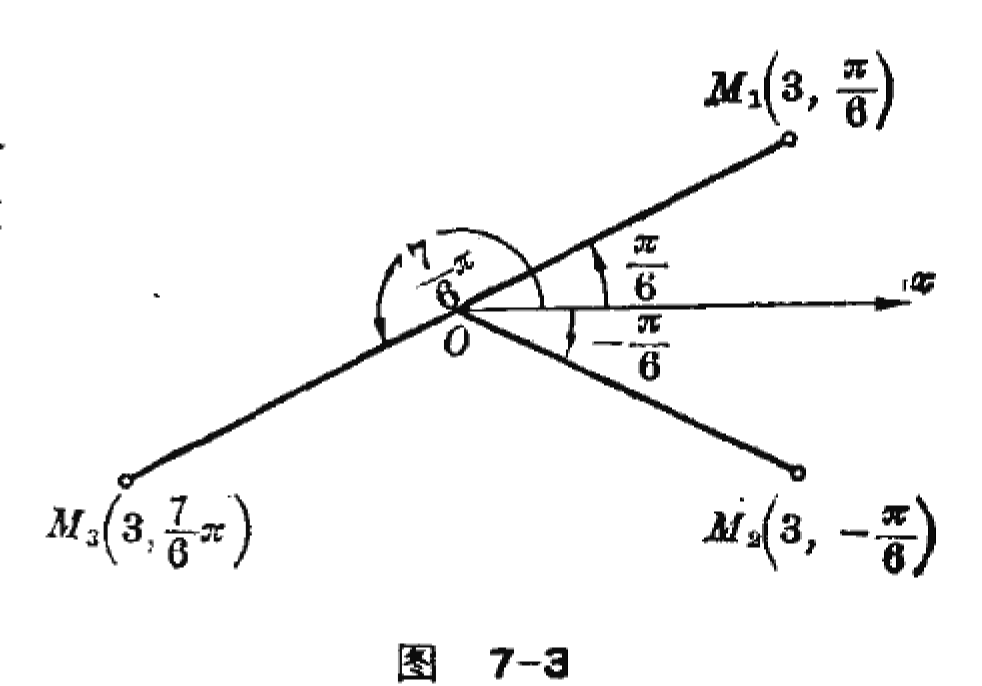


图 7-3

已知 M_1 的坐标为$\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$, 设 M_1 关于极轴的对称点为

M_2, 关于极点的对称点为 M_3, 那么, M_2 与 M_3 的坐标为

$$M_2\left(3, -\frac{\pi}{6}\right); \quad M_3\left(3, \frac{7}{6}\pi\right).$$

必须指出，在极坐标系中，虽然极坐标(r, θ)唯一地决定平面上一点 M, 但反过来，对于平面上每个点 M, 它的极坐标表示却有无穷多个：当 (r, θ) 是点 M 的极坐标时，对于任何整数 n, $(r, \theta+2n\pi)$也都是点 M 的极坐标.

二、曲线的极坐标方程

与在直角坐标系中的情形相同，在极坐标系中，平面上一条曲线可以用含有极坐标 r, θ 的方程来表示，这方程称为曲线的极坐标方程. 反过来，含有 r, θ 的方程也表示极坐标系中的一条曲线. 下面讨论由曲线求极坐标方程和由极坐标方程画曲线的问题.

1. 极坐标方程的建立

建立曲线的极坐标方程的方法和建立直角坐标方程的方法类似，我们通过几个例子来说明.

[例 3] 求以极点为圆心，半径为 R 的圆的极坐标方程.

解：设圆上动点M的极坐标为 (r, θ)，这圆的特征是动点 M 的极径 r 始终等于 R(图 7-4)，即

$$r=R,$$

这就是所求圆的极坐标方程.

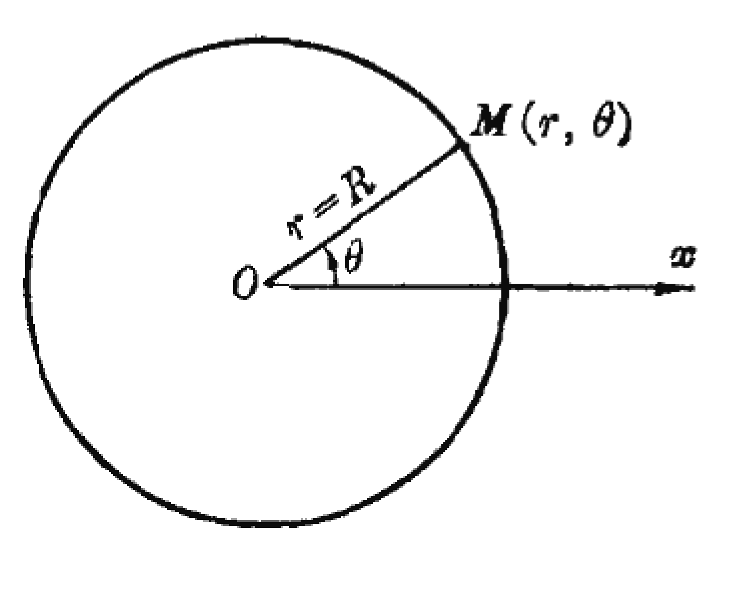


图 7-4

[例 4] 设 l 是极轴绕 O 旋转 α 角所得的射线，试求 l 的极坐标方程.

解：这射线的特征是动点 M 的极角 θ 始终等于 α（图 7-5），即

$$\theta=\alpha,$$

这就是所求射线的极坐标方程.

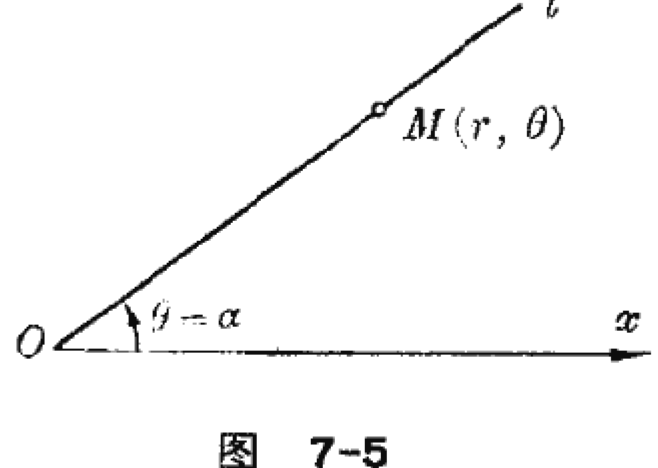


图 7-5

这里要注意，上面形式的极坐标方程和类似形式的直角坐标方程表示完全不同的曲线. 在直角坐标系中，方程 $x=a$ 和 $y=b$（a, b 是常数）分别表示平行于 y 轴和 x 轴的直线，而在极坐标系中，方程 $r=R$ 和 $\theta=\alpha$（R, α 是常数）则分别表示以极点为圆心的圆和从极点出发的射线.

[例 5] 求圆心在点 $C(a, 0)$，半径为 a 的圆的极坐标方程.

解：由平面几何知道，当 $M(r,\theta)$ 在所给圆上运动时，$\angle OMA$ 始终为一直角（图 7-6），因而从直角三角形 OMA 可得

$$OM=OA\cos\theta,$$

即

$$r=2a\cos\theta$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

这就是所求圆的方程.

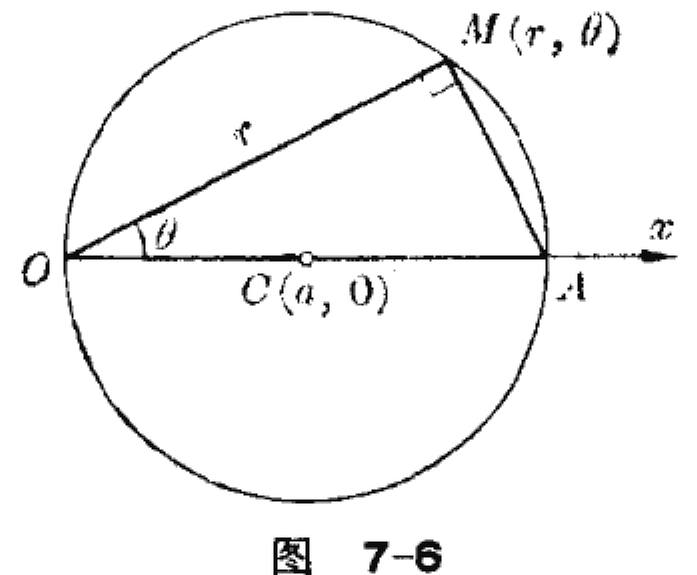


图 7-6

我们也可以用圆的另一特征：$CM=a$ 来导出它的极坐标方程，得到与上面同样的结果，留给读者作为练习.

[例 6] 圆锥曲线的极坐标方程.

在天体力学中，经常用到椭圆、双曲线和抛物线的极坐标方程. 现在以椭圆为例，导出它的极坐标方程.

取焦点 F_1 为极点，从 F_1 出发过另一焦点 F_2 的射线为极轴(图 7-7)．设 $M(r,\theta)$ 为椭圆上任一点，则根据椭圆的定义，有

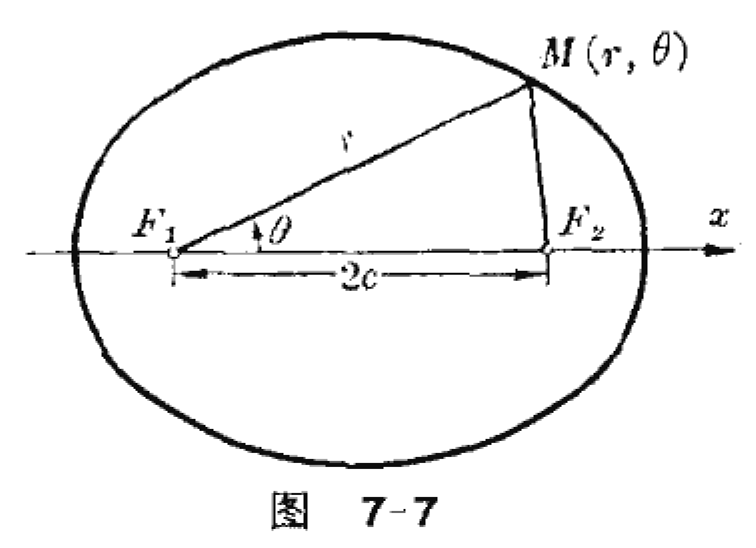


图 7-7

$$MF_1+MF_2=2a\ (\text{定长}),$$

从而

$$MF_2=2a-MF_1=2a-r.$$

为了用极坐标表示 MF_2，我们在 $\triangle MF_1F_2$ 中应用余弦定理，得

$$(MF_2)^2=r^2+(2c)^2-2r\cdot 2c\cos\theta,$$

其中 $2c\,(<2a)$ 是 F_1 和 F_2 之间的距离．两式联立，得

$$(2a-r)^2=r^2+4c^2-4cr\cos\theta,$$

解得

$$r=\frac{a^2-c^2}{a-c\cos\theta}=\frac{b^2}{a-c\cos\theta},$$

这就是椭圆的极坐标方程，其中 $b=\sqrt{a^2-c^2}$ 是椭圆的短半轴．

同样，对于双曲线，取极坐标系如图 7-8 所示，可推得其极坐标方程也是

$$r=\frac{b^2}{a-c\cos\theta},$$

但其中 $b=\sqrt{c^2-a^2}\ (a<c)$ 是虚半轴．

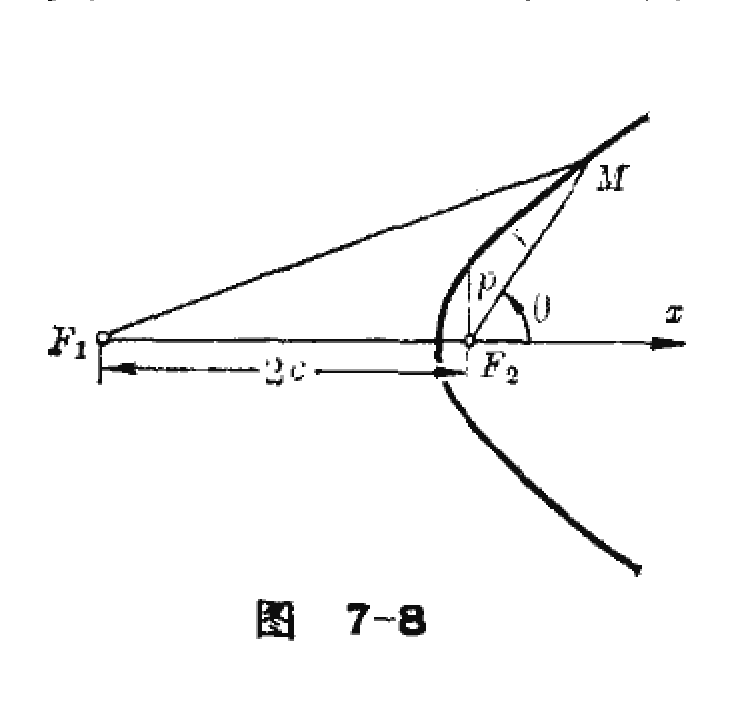


图 7-8

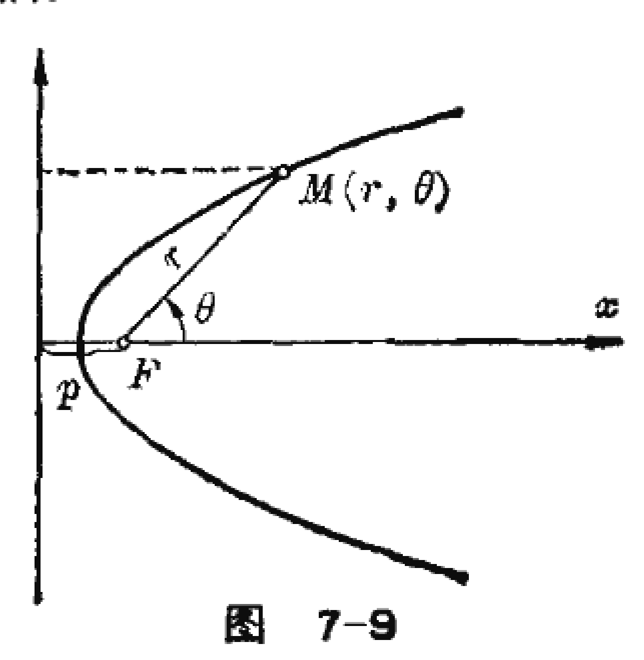


图 7-9

最后，对于抛物线，取极坐标系如图7-9，可推得其极坐标方程为

$$r=\frac{p}{1-\cos\theta}.$$

上面导出的椭圆、双曲线的极坐标方程和抛物线的极坐标方程可以统一起来，只要在椭圆、双曲线的方程中令$\frac{b^2}{a}=p$，$\frac{c}{a}=e$，便得到这三种曲线的极坐标方程的统一形式：

$$r=\frac{p}{1-e\cos\theta}. \tag{1}$$

对于椭圆，$e=\frac{c}{a}$，因$a>c>0$，故$0<e<1$；

对于抛物线，$e=1$；

对于双曲线，$e=\frac{c}{a}$，因$c>a>0$，故$e>1$.

上面的p叫做圆锥曲线的焦参数，从(1)可知，当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$r=p$，所以p是从焦点引出的垂直于极轴的极径的长度.

e叫做离心率．对于椭圆，$0<e=\frac{c}{a}<1$，e越大，则c越接近于a，从而$b=\sqrt{a^2-c^2}$越小，因此椭圆越扁；反之，e越小，则c越接近于0，从而b就越接近于a，因此椭圆就越接近于圆．对于双曲线，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$，$e$越大，则$\frac{b}{a}$越大，也即渐近线斜率的绝对值越大，因此双曲线的开口就越大.

2．极坐标方程的图形

已经知道了曲线的极坐标方程，要作出它的图形，通常采用描点法．与直角坐标系下画曲线图形的方法类似，在描点作图之前，可对方程先进行分析，以便掌握求作图形的特征.

例如，通过对方程的分析，确定图形是否具有对称性.

在极坐标方程中，如果将 θ 换成 $-\theta$ 而方程不变，则它的图形关于极轴对称；如果将 θ 换成 $\pi+\theta$ 而方程不变，则它的图形关于极点对称.

下面举一个例子.

［例 7］ 求作极坐标方程 $r=2(1+\cos\theta)$ 的图形.

解：首先我们看到，当 θ 由 0 逐渐增大时，r 由 4 逐渐减小，到 $\theta=\pi$ 时 $r=0$. 然后，随着 θ 的继续增大，r 又逐渐增大，到 $\theta=2\pi$ 时 $r=4$. 这说明图形偏在极点的右方.

在方程中，以 $-\theta$ 代 θ，方程不变，所以图形关于极轴对称.

根据以上的分析，我们对图形已有大致的了解，再取几个特殊点：

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	4	3.7	3.4	3	2	1	0

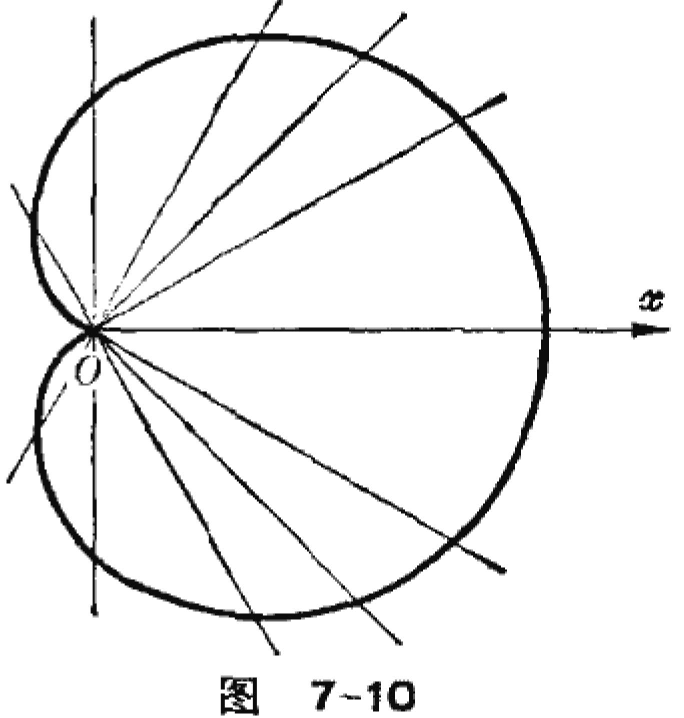


图 7-10

在极轴上方描出表中的点，连成光滑曲线，并依对称性画出极轴下方的另一半，就得到 $r=2(1+\cos\theta)$ 的图形（图 7-10）.

曲线 $r=2(1+\cos\theta)$ 称为心脏线，常用作凸轮的轮廓线.

三、等速螺线和凸轮

在机械传动机构中，常常利用凸轮把旋转运动变成直线运动. 这种凸轮的工作部分的外廓线常采用所谓等速螺线，它的定义如下：

定义 设 l 是从 O 点出发的射线，动点 M 沿 l 作等速运动，而 l 又绕 O 点作等角速转动，则 M 点的轨迹称为等速螺线（或阿基米德螺线）.

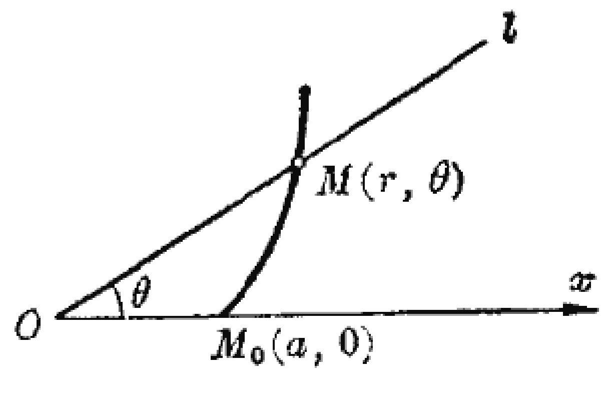


图 7-11

现在来建立等速螺线的方程. 取 O 点为极点，以 l 的初始位置为极轴，建立极坐标系如图 7-11.

设 $M_0(a, 0)$ 是动点 M 的初始位置，M 在 l 上运动的速度为 v，l 绕 O 点转动的角速度为 ω，经时刻 t 后，l 转过角度 θ，而动点到达位置 $M(r, \theta)$. 据螺线定义可知

$$r-a=vt,$$

$$\theta=\omega t.$$

在上两式中消去 t，得到

$$r-a=\frac{v}{\omega}\theta.$$

记 $\frac{v}{\omega}=b$，则

$$r=a+b\theta.$$

上式就是等速螺线的极坐标方程.

[例 8] 作等速螺线 $r=10+2\theta$ 的图形.

解：从方程看出，图形是不对称的. r 随 θ 的增大而增大，所以图形是盘旋地无限伸展的.

取 θ 的一些特殊值，求出 r 的相应值，列表如下：

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
r	10	11.04	12.09	13.14	14.18	15.24	16.28	19.42	22.56	25.78	28.84

在平面上描出表中的点，连成光滑曲线，即为所求作的等速螺线(图 7-12).

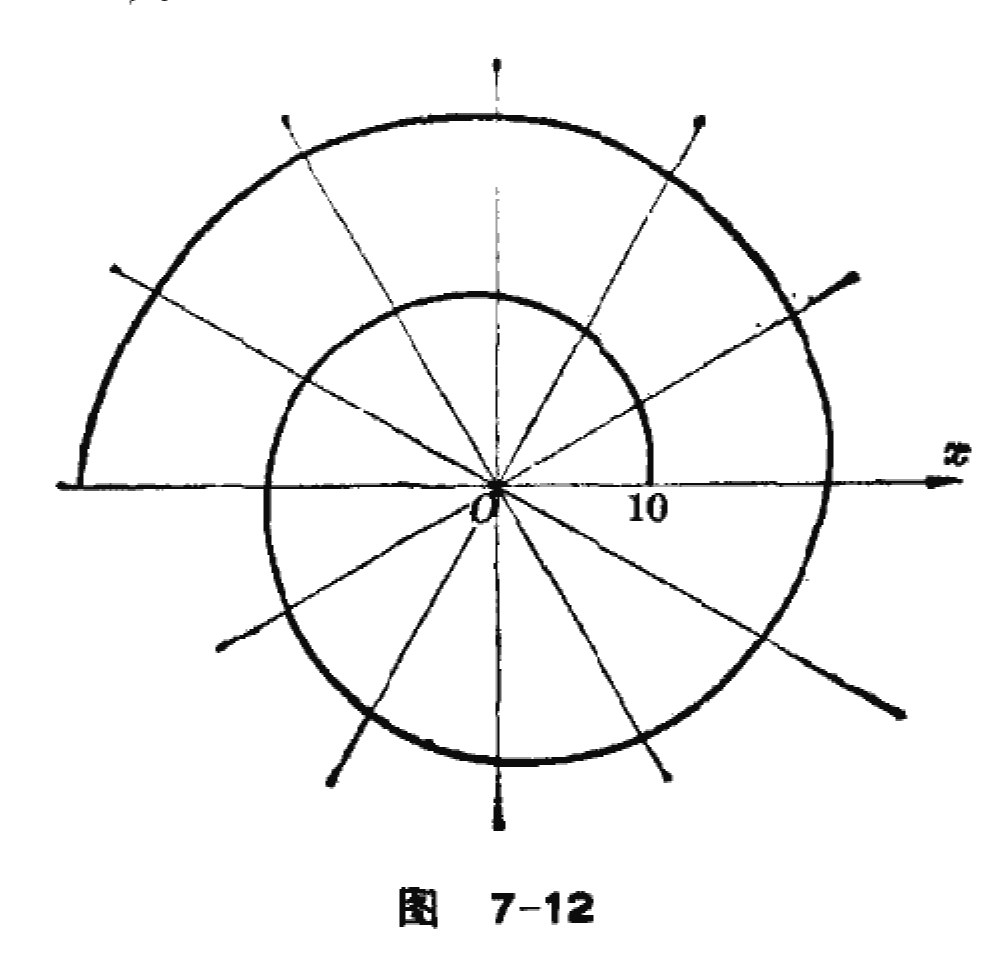


图 7-12

为什么凸轮外廓线采用等速螺线，能把等角速转动变为等速直线运动呢？这是因为动点 M 从 M_0 出发沿等速螺线运动时(图 7-11)，它的极径的增加量与极角的增加量成正比，于是，只要凸轮以等角速转动，就能使从动杆作等速直线运动.

如图 7-13 所示，设凸轮按顺时针方向以等角速度 ω (弧

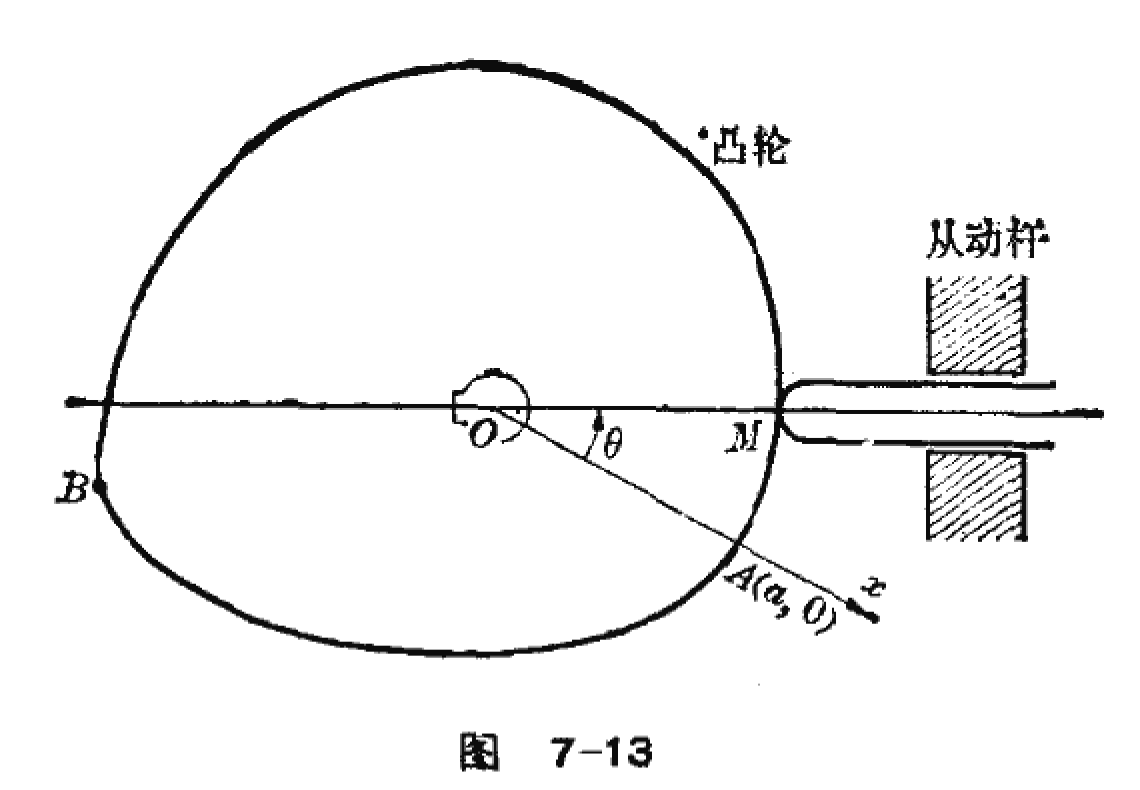


图 7-13

度/秒)转动，当 $t=0$ 时，从动杆触头与凸轮在 A 点接触，A 点到轴心 O 的距离为 a. 经过时刻 t，凸轮转过角度 $\theta=\omega t$，而从动杆与凸轮接触于 M 点. 由于凸轮工作部分的外廓线的 $\widehat{AMB}$ 方程为

$$r=a+b\theta,$$

所以，M 点的极径为

$$r=a+b\omega t,$$

从而极径增加量为

$$r-a=b\omega t,$$

即从动杆移动的距离 $r-a$ 与时间 t 成正比，比例系数为 $b\omega$，这就表明从动杆作速度为 $b\omega$ 的等速直线运动. 如要求从动杆运动的速度为 v，只须令 $b\omega=v$，即令 $b=\frac{v}{\omega}$，也就是说，只须把凸轮工作部分外廓线 $\widehat{AMB}$ 方程取作

$$r=a+\frac{v}{\omega}\theta.$$

[例 9] 一凸轮如图 7-14 所示. 当凸轮按箭头方向等角速转动时，要求：

(1) 从动杆接触 $\widehat{ABC}$ 段时，从动杆不动；

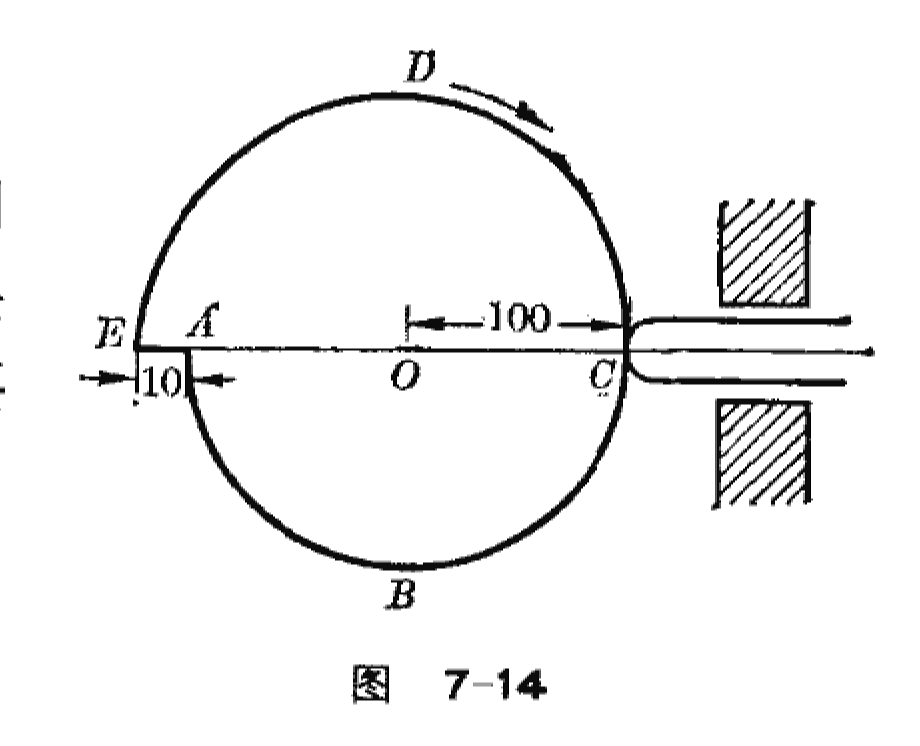


图 7-14

(2) 从动杆接触 $\widehat{CDE}$ 段时，从动杆等速向右.

试按图中尺寸列出该凸轮外廓线 $\widehat{ABC}$ 段和 $\widehat{CDE}$ 段的极坐标方程.

解：以 O 为极点，射线 OC 为极轴，建立极坐标系.

(1) 根据要求 $\widehat{ABC}$ 段上动点的极径应保持不变，因 C 点的极径为 100，故 $\widehat{ABC}$ 段应为半径等于 100 的圆弧，它的极坐标方程为

$$r=100 \quad (-\pi\leqslant\theta\leqslant 0).$$

(2) 由于 $\widehat{CDE}$ 段的作用是将等角速转动变成等速直线运动，因此它应为等速螺线，可设其方程为

$$r=a+b\theta,$$

其中 a, b 是待定常数.

由于点 $C(100, 0)$ 与点 $E(110, \pi)$ 在曲线上，把它们的极坐标分别代入上式，得

$$100=a,$$
$$110=a+b\pi,$$

解得

$$a=100, \quad b=\frac{10}{\pi},$$

所以 $\widehat{CDE}$ 段的极坐标方程为

$$r=100+\frac{10}{\pi}\theta \quad (0\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

四、极坐标与直角坐标的互换

下面，我们来建立极坐标和直角坐标之间的变换公式，并讨论曲线方程在这种变换下的变形.

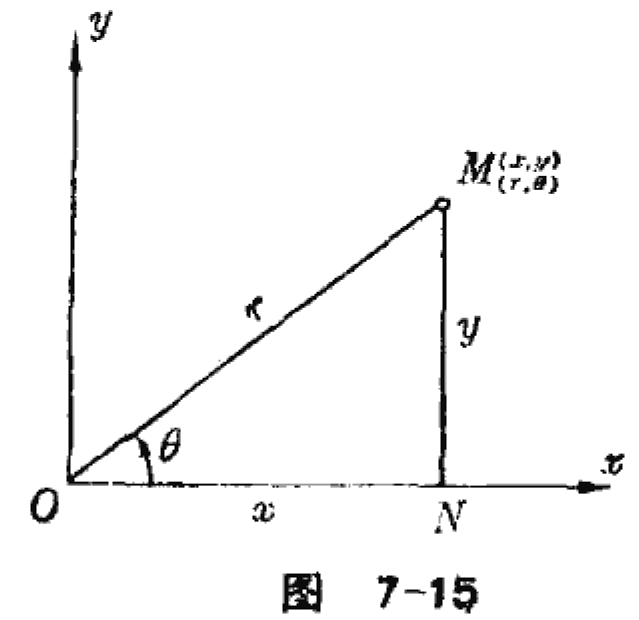


图 7-15

使极坐标系的极点和直角坐标系的原点重合，极轴和 x 轴重合 (图 7-15). 设平面上任一点 M 的直角坐标为 (x, y)，极坐标为 (r, θ). 由三角知识知道它们

之间有如下关系：

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x},\tag{2}$$

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta.\tag{3}$$

［例 10］ (1) 已知点 M 的直角坐标为 $(2,\ -2)$，N 的直角坐标为 $(-3,\ 3)$，求它们的极坐标；

(2) 已知点 P 的极坐标为 $\left(2,\ \frac{2}{3}\pi\right)$，求它的直角坐标.

解：(1) 把 $x=2,\ y=-2$ 代入式(2)，得

$$r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-2}{2}=-1,$$

因为点 M 在第 IV 象限，所以取 $\theta=\operatorname{arc\,tg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\frac{7}{4}\pi$. 点 M 的极坐标为 $\left(2\sqrt{2},\ -\frac{\pi}{4}\right)$ 或 $\left(2\sqrt{2},\ \frac{7}{4}\pi\right)$.

同样，对点 N 有

$$r=3\sqrt{2},\quad \operatorname{tg}\theta=-1,$$

但因为点 N 在第 II 象限，所以取 $\theta=\frac{3}{4}\pi$ 或 $\theta=-\frac{5}{4}\pi$. 点 N 的极坐标为 $\left(3\sqrt{2},\ \frac{3}{4}\pi\right)$ 或 $\left(3\sqrt{2},\ -\frac{5}{4}\pi\right)$.

(2) 把 $r=2,\ \theta=\frac{2}{3}\pi$ 代入式(3)，得

$$x=2\cos\frac{2}{3}\pi=-1,$$

$$y=2\sin\frac{2}{3}\pi=\sqrt{3},$$

即点 P 的直角坐标为 $(-1,\ \sqrt{3})$.

有了直角坐标与极坐标之间的变换公式，就可以把曲线的直角坐标方程化为极坐标方程，或者反过来，把曲线的极坐标方程化为直角坐标方程.

[例 11]　已知曲线的直角坐标方程为

$$x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2}-x=0,$$

求它的极坐标方程.

解：把变换式(3)代入所给方程，得

$$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta-\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}-r\cos\theta=0,$$

因为 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，上式化为

$$r(r-1-\cos\theta)=0,$$

所以曲线由两支组成，它们的极坐标方程分别为

$$C_1:\quad r=0;$$

$$C_2:\quad r=1+\cos\theta.$$

我们看到，C_1 退化为一点，即极点；C_2 是心脏线.

[例 12]　已知曲线的极坐标方程为

$$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1,$$

求它的直角坐标方程.

解：方程 $r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1$ 可化为

$$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=1,$$

即

$$\frac{1}{2}r\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta=1.$$

把式(3)代入并化简，得

$$x+\sqrt{3}y-2=0,$$

这是一条直线.

小　　结

1. 点 M 的极坐标记为 $M(r, \theta)$，其中，r 是点 M 到极点 O 的距离，称为极径；θ 是极轴 Ox 到 OM 的角度，称为极角.

2. 几种常用曲线的极坐标方程.

(1) 以极点为圆心、R 为半径的圆的极坐标方程为

$$r=R;$$

(2) 极轴绕 O 旋转 α 角所得射线的极坐标方程为

$$\theta=\alpha;$$

(3) 圆锥曲线的极坐标方程为

$$r=\frac{p}{1-e\cos\theta},$$

其中 p 称为焦参数，e 称为离心率，当 $0<e<1$ 时，它表示椭圆；当 $e=1$ 时，它表示抛物线；当 $e>1$ 时，它表示双曲线；

(4) 等速螺线的极坐标方程为

$$r=a+b\theta.$$

以等速螺线作为凸轮的轮廓线，可以将等角速转动变成等速直线运动.

3. 直角坐标与极坐标的互换.

(1) 由极坐标求直角坐标：

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta;$$

(2) 由直角坐标求极坐标：

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}.$$

习　　题

1. 在极坐标系中描出下列各点：

$M_1\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$;　　$M_2\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$;　　$M_3\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$;

$M_4\left(4, \frac{5}{3}\pi\right)$;　　$M_5\left(5, \frac{3}{2}\pi\right)$;　　$M_6\left(3, -\frac{\pi}{4}\right)$.

2. 在极坐标系中作出下列曲线的图形:

(1) $r=\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$;　　(2) $r=\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2 \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$;

(3) $r=1+\frac{\theta}{\pi} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$;　　(4) $r=2e^{\theta} \quad (-2\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$;

(5) $r=1+\cos\theta \quad (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$.

3. 等速螺线过点(0, 0), 且极角每增加 $\frac{\pi}{3}$ 弧度, 极径就增加1.5:

(1) 试求螺线的极坐标方程;

(2) 算出 $\theta=0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi, \frac{7}{3}\pi$ 所对应的 r 值;

(3) 描出上述的点并作出 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{7}{3}\pi$ 范围内的螺线图形.

4. 半径为 R、圆心在: (1) $\left(R, \frac{\pi}{2}\right)$ 处; (2) (R, π) 处; (3) $\left(R, \frac{3}{2}\pi\right)$ 处, 求圆的极坐标方程.

5. 求下列直线的极坐标方程:

(1) 过 $P\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, 垂直于极轴;　(2) 过 $Q\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$, 平行于极轴.

6. 从极点作圆 $r=2a\cos\theta$ 的弦, 求这些弦中点的轨迹的极坐标方程, 并说明它的图形是什么曲线.

7. 求下列各点的直角坐标:

$M_1\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$;　　$M_2\left(3, \frac{7}{6}\pi\right)$;　　$M_3\left(1, \frac{3}{2}\pi\right)$;

$M_4\left(3, \frac{5}{6}\pi\right)$;　　$M_5\left(4, -\frac{\pi}{3}\right)$.

8. 求下列各点的极坐标:

$M_1(1, 2)$; $M_2(6, 8)$; $M_3(-1, -2)$; $M_4(-1, 3)$; $M_5(2, -1)$.

9. 化下列曲线的直角坐标方程为极坐标方程:

(1) $y=\sqrt{3}x$;　　(2) $xy=\frac{1}{2}$;

(3) $x^2-y^2=a^2$;　　(4) $x^2+(y+3)^2=9$;

(5) $x^2+y^2=2a(\sqrt{x^2+y^2}-x)$.

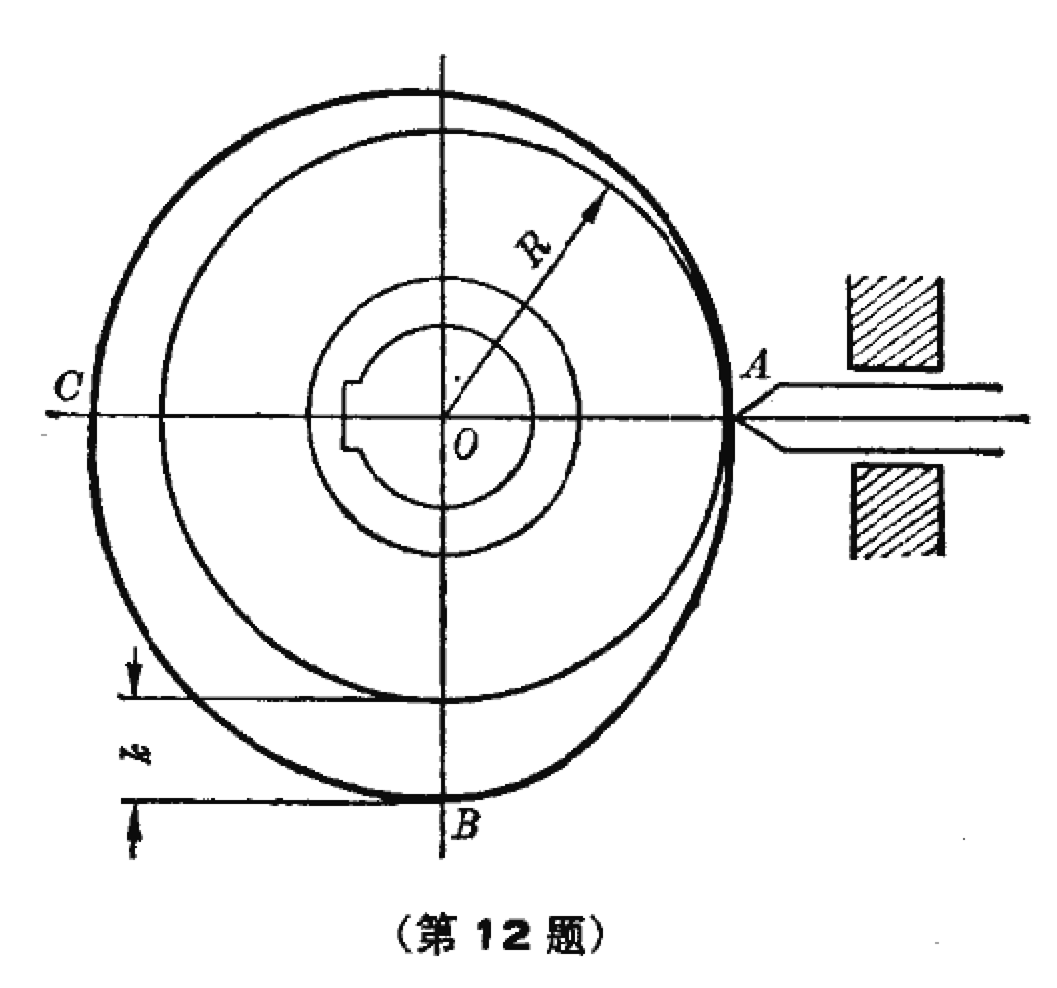
10. 化下列曲线的极坐标方程为直角坐标方程:

(1) $r\cos\theta=2$;　　(2) $r=-4\sin\theta+\cos\theta$;

(3) $r=\dfrac{1}{\cos\theta-2\sin\theta}$;　　(4) $r^2=\sin 2\theta$.

11. 试按图 7-8 和图 7-9 推导双曲线和抛物线的极坐标方程.

12. 有一凸轮机构如图. 设凸轮边缘上点 A 离轴心 O 最近, $OA=R$, 点



(第 12 题)

B 离 O 最远, $OB=R+k$. 凸轮以等角速度 ω 转动, 使从动杆作往复直线运动. 求

(1) 从动杆往复运动的速度 v_1 和 v_2;

(2) 曲线弧 $\widehat{ACB}$ 和 $\widehat{BA}$ 的极坐标方程.

第二节　参 数 方 程

一、曲线的参数方程

前面建立的各类曲线方程, 都是曲线上动点坐标 x 和 y (或 r 和 θ) 之间的直接关系式.

在某些实际问题中, 动点的轨迹用动点坐标之间的直接

关系式来表示并不方便，或者一下子不容易找到这种直接关系，这时往往借助于第三个变量 t，将动点的轨迹用动点坐标 x 和 y（或 r 和 θ）各自与 t 的关系式间接地来表达．这是物理学中常用的方法，我们在导出等速螺线的极坐标方程时也应用了这一方法．下面再来看一个例子．

在黄河凌期用飞机轰炸冰坝，以免河水泛滥．为了使炸弹比较准确地击中目标，有必要研究炸弹运动的轨迹．

设飞机投掷时是沿水平方向飞行的，取炸弹开始下落时飞机的位置为坐标原点，过原点沿飞机飞行方向的直线为 x 轴．过原点的铅直线为 y 轴，正向向下（图 7-16）．设经过时间 t，炸弹到达位置 $M(x, y)$．

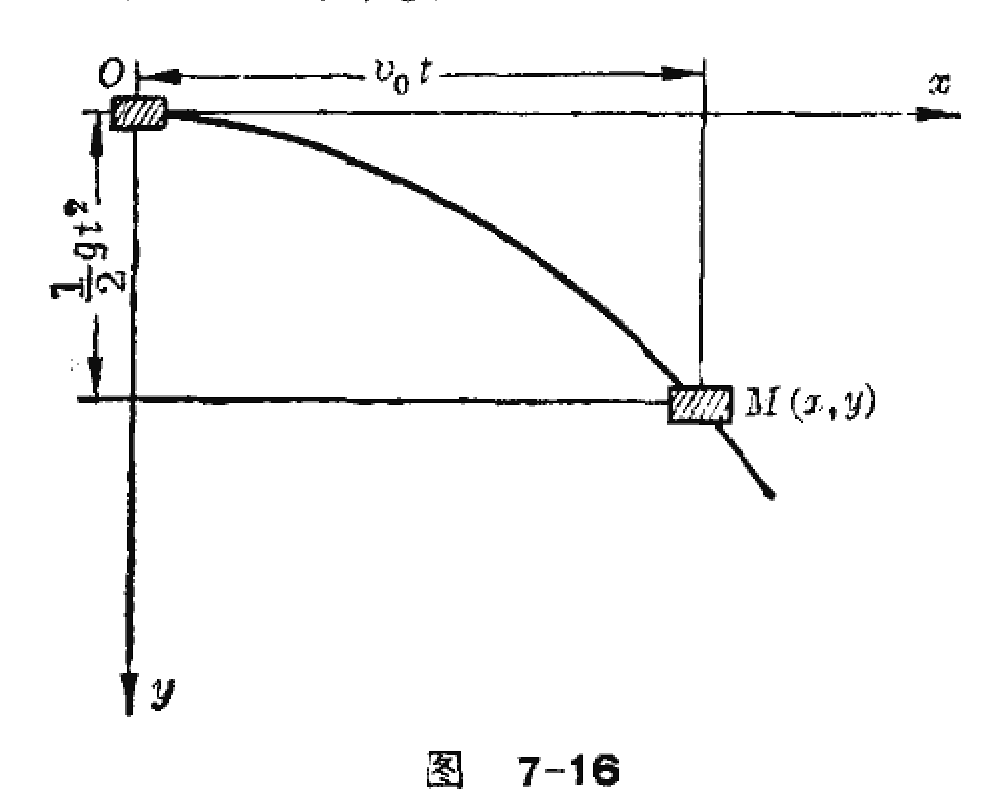


图 7-16

这里，要直接建立 M 的坐标 x 和 y 之间的关系是比较困难的，但根据物理知识，x 和 y 各自与时间变量 t 的关系是容易建立的．

炸弹脱离飞机后，它的运动是由水平方向的等速运动和铅直方向的自由落体运动合成的（不计空气阻力）．在水平方向，炸弹作等速运动，其速度与飞机在投掷时的飞行速度相同．设这速度为 v_0，则经过时间 t，炸弹沿水平方向移动的

距离为

$$x=v_0t;$$

在铅直方向，炸弹在重力作用下，作自由落体运动，经过时间 t，炸弹下落的距离为

$$y=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度. 这样，就得到描写炸弹运动过程的方程(物理上称为运动方程)

$$\begin{aligned} x&=v_0t, \\ y&=\frac{1}{2}gt^2. \end{aligned} \tag{4}$$

当时间 t 取某一数值时，方程组(4)就给出了炸弹在这一时刻所在位置 M 的坐标. 比如，当 $t=1$ 时，M 的坐标为 $\left(v_0, \frac{1}{2}g\right)$；当 $t=2$ 时，M 的坐标为 $(2v_0, 2g)$，等等. 让 t 从 0 起连续增加，$M(x, y)$ 就从原点起连续变动，从而描出了炸弹运动的轨迹. 因此，方程组(4)就给出了所求的轨迹.

象方程组(4)那样，用一个中间变量 t 来表达曲线上动点坐标 x 和 y 的方程组，称为参数方程，t 称为参数. 这里我们用参数表示动点的直角坐标，得到了曲线在直角坐标系中的参数方程；同样，可以用参数表示动点的极坐标，而得出曲线在极坐标系中的参数方程. 平面曲线的参数方程一般要用两个式子来表示.

有了参数方程后，通过消去参数就可以求得 x 和 y 的直接关系式. 例如，对于上述炸弹的运动方程(4)，只要从第一式中解出 t，代入第二式，就得到

$$y=\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2,$$

即

$$y=\frac{g}{2v_0^2}x^2, \tag{5}$$

这就是炸弹运动轨迹的直角坐标方程．由这方程可见，轨迹是抛物线(这也正是抛物线这一名称的由来)．

运动方程(4)比轨迹方程(5)更深刻地描写了炸弹的运动情况．比如，从运动方程(4)可以直接知道炸弹在任一时刻 t 到达的位置，据此就可解决某些与此有关的问题．

[例 1] 设飞机飞行的高度 $H=600$ 米，飞行速度 $v_0=150$ 米/秒，试问：

(1) 炸弹离开飞机后要经过多少时间才能到达河面？

(2) 飞机必须在离开目标多远(指水平距离)的地方投掷炸弹才能击中目标？

解：(1) 炸弹从飞机上落到河面时，下落的距离等于飞机飞行的高度，即

$$H=\frac{1}{2}gt^2,$$

从而

$$t=\sqrt{\frac{2H}{g}}=\sqrt{\frac{1200}{9.8}}\approx 11\ (\text{秒})；$$

(2) 既然炸弹离开飞机后要经过 11 秒才能到达河面，那末由 $x=v_0t$ 可知，在这段时间内炸弹沿水平方向运动的距离为

$$x=150\times 11=1650\ (\text{米})．$$

答：(1) 炸弹离开飞机后要经过 11 秒才能到达河面．(2) 飞机必须在离开目标 1650 米 (指水平距离) 的地方投掷炸弹，才能击中目标．

一般，在用参数方程表示曲线时，选用的参数不一定是时间，可以是其他量，应当根据问题的具体条件来选定。

［例 2］ 求圆心在原点，半径为 R 的圆的参数方程.

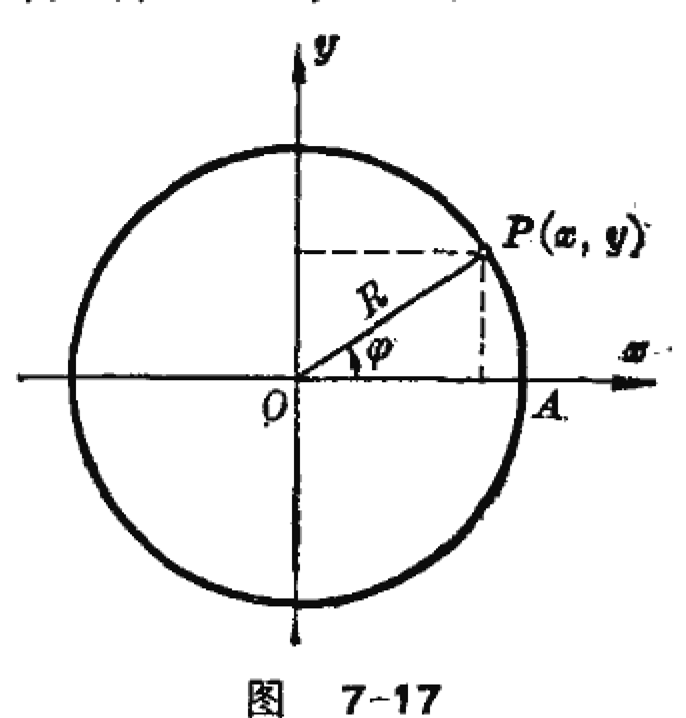


图 7-17

解：设 $P(x, y)$ 是圆上任意点. 取 $\angle POA=\varphi$ 为参数(图 7-17)，则

$$x=R\cos\varphi,$$
$$y=R\sin\varphi.$$

这就是所求的圆的参数方程.

从上面的参数方程中消去参数 φ，即得圆的标准方程

$$x^2+y^2=R^2.$$

［例 3］ 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程.

解：由于椭圆的标准方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{6}$$

对照三角恒等式

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$$

可知，对任意一个角 φ，如果令

$$\frac{x}{a}=\cos\varphi,$$

$$\frac{y}{b}=\sin\varphi,$$

即

$$\begin{aligned} x&=a\cos\varphi,\\ y&=b\sin\varphi, \end{aligned} \tag{7}$$

则点(x, y)必在椭圆(6)上. 且当φ从0变到2π时,点(x, y)从点$(a, 0)$出发沿椭圆(6)运动一周, 这说明椭圆(6)上的点的坐标都可以用方程组(7)表示,因此方程组(7)是椭圆(6)的参数方程.

利用椭圆的参数方程,可以得到椭圆的一种画法如下:如图7-18, 以原点为圆心,分别以a、b为半径作两个同心圆,然

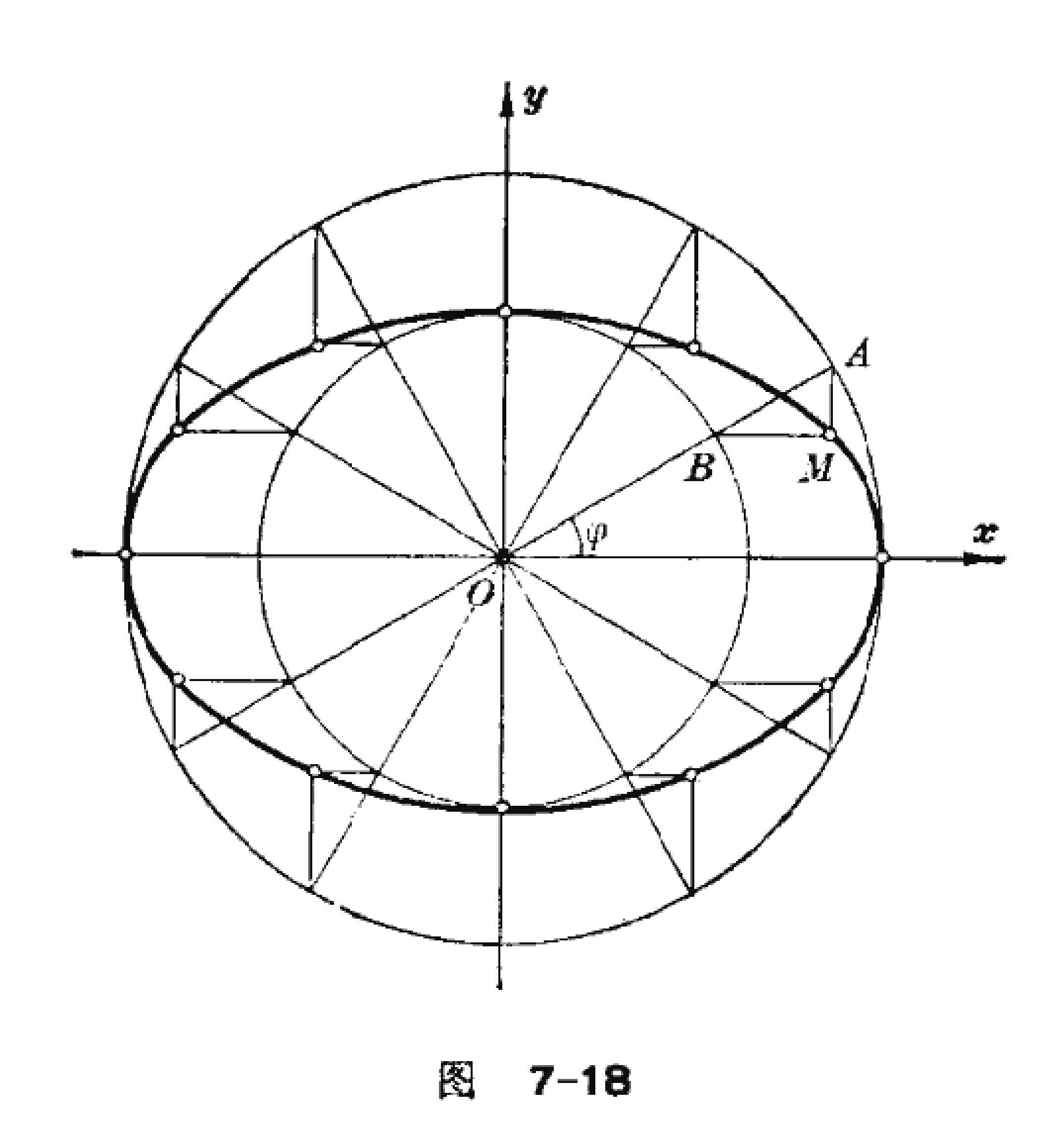


图 7-18

后从原点出发任作一射线OA与这两同心圆分别交于A、B两点. 过A作y轴的平行线, 过B作x轴的平行线, 它们的交点$M(x, y)$就是椭圆上一点(事实上, $\angle AOx$就是参数φ, 而$x=a\cos\varphi, y=b\sin\varphi$). 按这种办法定出椭圆上一系列的点, 把这些点连成一条光滑的曲线,就是长半轴、短半轴分别为a、b的椭圆.

参数φ称为椭圆上点$M(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$的离心角. 要注意,它并不是$OM$和$Ox$的夹角.

[例 4] 证明参数方程

$$x=x_0+\lambda t \quad (\lambda\neq 0),$$
$$y=y_0+\mu t$$

表示一条过点(x_0, y_0)，斜率为$k=\frac{\mu}{\lambda}$的直线.

证：从参数方程中消去t得

$$y-y_0=\frac{\mu}{\lambda}(x-x_0),$$

它正是过点(x_0, y_0)，以$k=\frac{\mu}{\lambda}$为斜率的直线的点斜式方程.

注意，$\lambda=0$时上述参数方程给出垂直于x轴的直线$x=x_0$.

二、渐开线和摆线

1. 渐开线及其参数方程

机械工业中最常用的齿轮的齿廓线，是一种叫做渐开线的曲线. 什么是渐开线？在一个固定的圆盘上绕有一条细线，拉住线头，把线从圆盘上渐渐拉出来，并使拉出部分始终沿着与圆盘相切的方向绷紧，这样，线头的轨迹就叫做渐开线(图 7-19). 根据这模型，我们给出渐开线的定义.

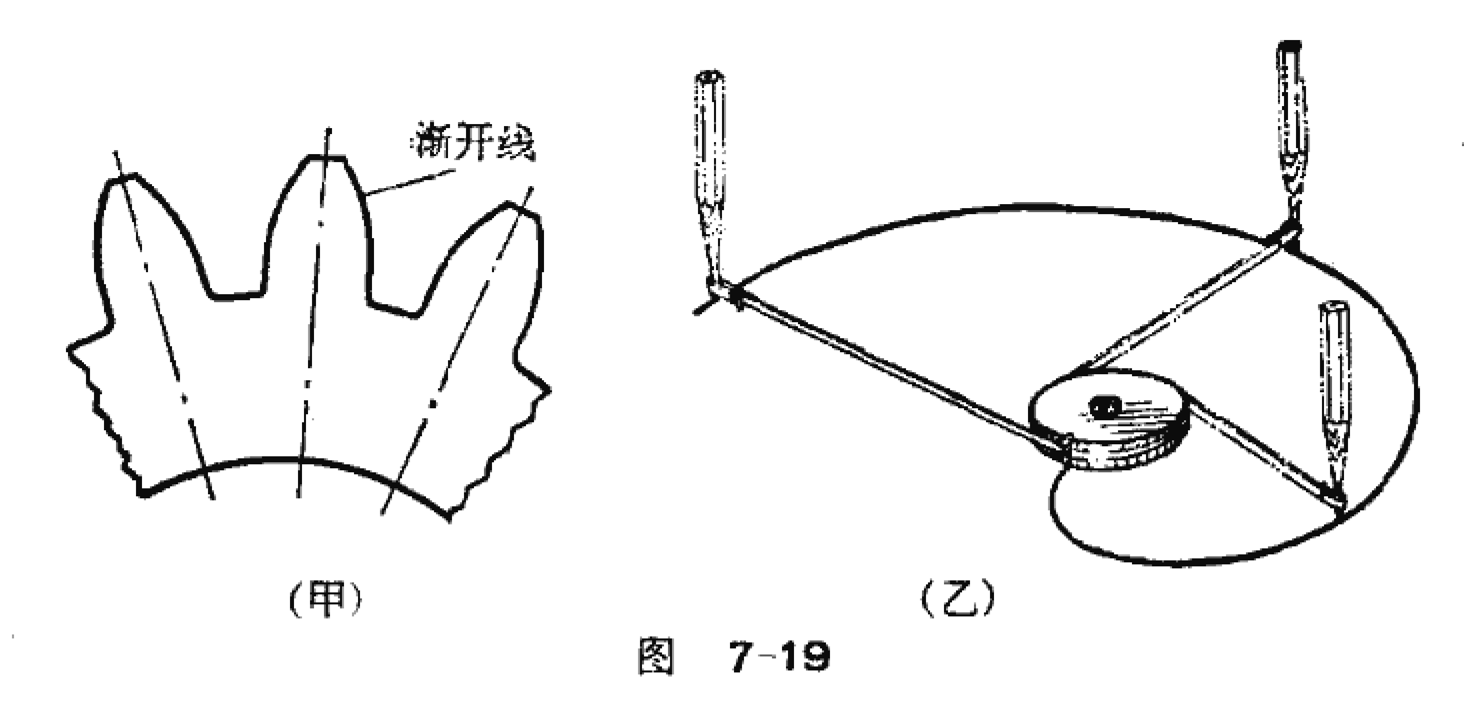


图 7-19

定义 一条直线在一个圆上作无滑动的滚动时，直线上

一定点运动的轨迹称为渐开线，这圆称为渐开线的基圆，这直线称为渐开线的发生线.

下面推导渐开线的参数方程. 设基圆半径为 r_0, 渐开线与基圆的交点为 A_0. 取基圆圆心 O 作极点, 射线 OA_0 为极轴 (图 7-20). 过曲线上点 $A(r, \theta)$ 作基圆的切线 AB, B 是切点, 记 $\alpha=\angle BOA$, 我们就用 α 作参数.

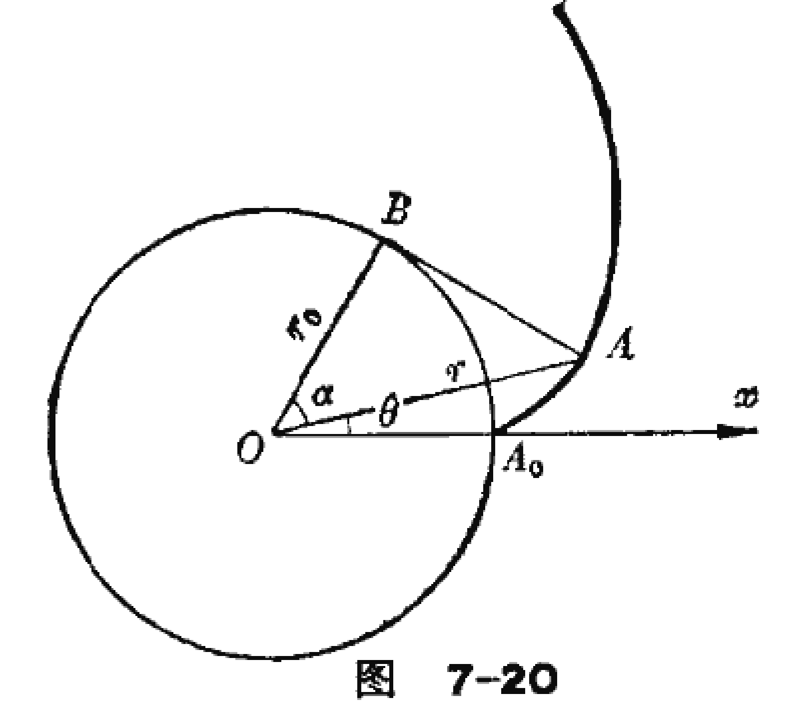


图 7-20

从直角三角形 OBA 得

$$\cos\alpha=\frac{r_0}{r},$$

即 r 与 α 的关系式为

$$r=\frac{r_0}{\cos\alpha}.$$

为求 θ 与 α 的关系式, 我们注意到渐开线的发生线是在圆上作无滑动的滚动，所以

$$AB=\overset{\frown}{A_0B}=r_0(\alpha+\theta),$$

其中 α 和 θ 用弧度表示. 但从直角三角形 OBA 又得

$$AB=r_0\operatorname{tg}\alpha,$$

于是

$$r_0\operatorname{tg}\alpha=r_0(\alpha+\theta),$$

即 θ 与 α 的关系式为

$$\theta=\operatorname{tg}\alpha-\alpha.$$

这样便得到渐开线的极坐标参数方程

$$\begin{aligned} r&=\frac{r_0}{\cos\alpha},\\ \theta&=\operatorname{tg}\alpha-\alpha, \end{aligned} \tag{8}$$

其中 r_0 是基圆半径, α、θ 用弧度表示. 在机械原理中, α 称

为压力角，$\theta=\operatorname{tg}\alpha-\alpha$ 称为渐开线函数，有专门的渐开线函数表供设计时查用.

作为练习，读者试推导渐开线在直角坐标系中的参数方程.

2. 摆线及其参数方程

在齿轮设计中，有时还要用到另一种曲线——摆线.

定义 一个动圆在一条定直线上作无滑动的滚动时，圆周上一定点运动的轨迹称为摆线(图 7-21).

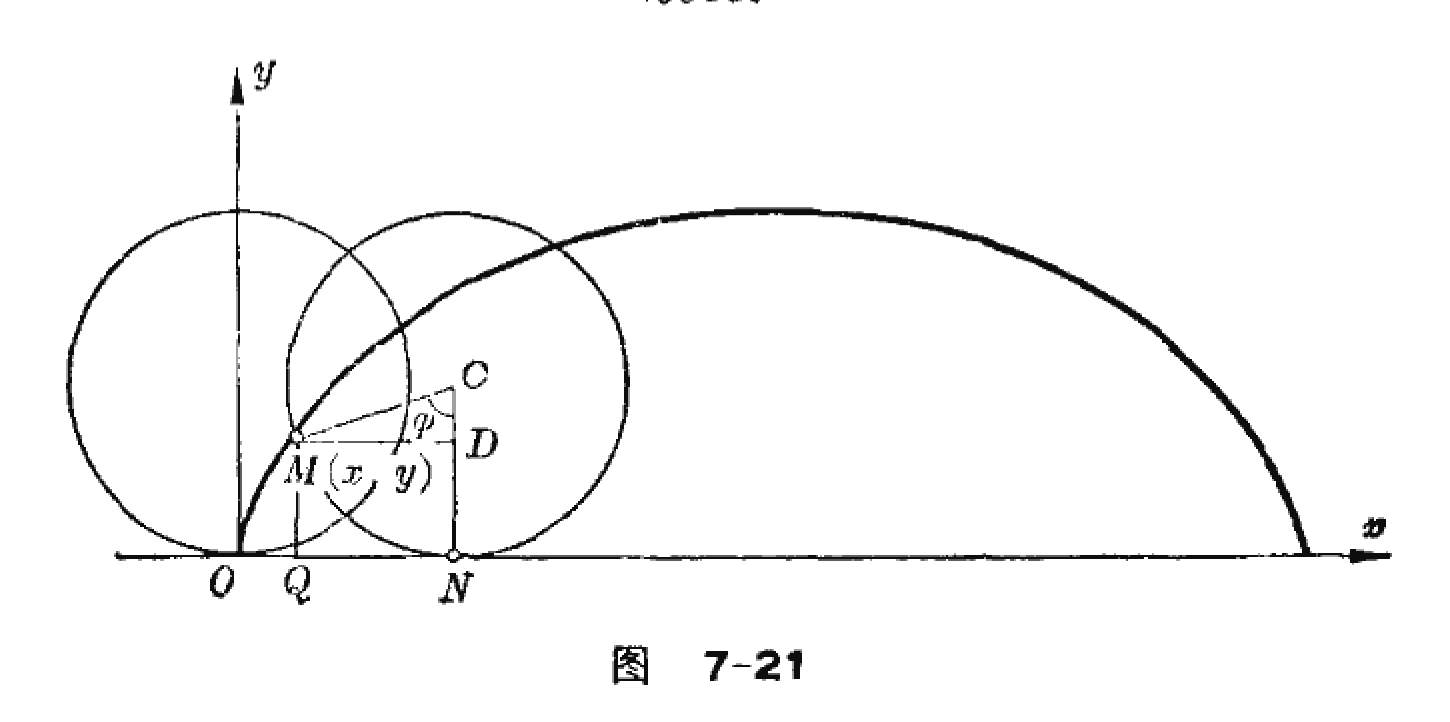


图 7-21

例如，车辆沿直线行驶时，轮周上任一点的轨迹都是摆线，所以摆线也叫旋轮线.

下面推导摆线的参数方程. 设动圆半径为 r_0，取定直线为 x 轴，圆滚动的方向为 x 轴的正向，建立直角坐标系. 设初始时刻圆上定点和原点重合，当圆从原点滚动到 N 点时，圆上定点由原点运动到 $M(x, y)$ (图 7-21). 我们看到，$M(x,y)$ 的位置可以由 $\angle MCN=\varphi$ 确定，因而就取 φ 为参数. 过 M 作 $MD\perp CN$, $MQ\perp Ox$. 因动圆在直线上作无滑动的滚动，所以 $ON=\overset{\frown}{MN}=r_0\varphi$，从而

$$x=OQ=ON-MD=r_0\varphi-r_0\sin\varphi,$$

$$y=QM=NC-DC=r_0-r_0\cos\varphi.$$

故得摆线的参数方程为

$$\begin{aligned} x&=r_0(\varphi-\sin\varphi),\\ y&=r_0(1-\cos\varphi). \end{aligned} \tag{9}$$

当圆滚动一圈,即 φ 由 0 变到 2π 时, M 点就描出了摆线的第一拱. 圆向前再滚一圈时, φ 从 2π 变到 4π, M 点描出摆线的第二拱. 显然, 第二拱的形状和第一拱完全相同. 圆继续向前滚动,可得摆线的第三拱, 第四拱……, 可见摆线具有周期性.

由参数方程作图, 一般采用描点法. 例如作摆线的图形时,每给定一个 φ 值, 由参数方程算出一组对应的 x, y 的值, 列表如下:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
x	0	$0.08r_0$	$0.57r_0$	$1.65r_0$	$3.14r_0$	$4.63r_0$	$5.71r_0$	$6.20r_0$	$6.28r_0$
y	0	$0.29r_0$	r_0	$1.71r_0$	$2r_0$	$1.71r_0$	r_0	$0.29r_0$	0

以表格中每一组 (x, y) 作为坐标, 描点, 然后把各点连成光滑曲线,即为摆线(图 7-21).

小　结

1. 用参数 t 来表示曲线上动点的坐标 x 和 y,或 r 和 θ, 而得到的方程组

$$x=x(t),\quad y=y(t)$$

或

$$r=r(t),\quad \theta=\theta(t),$$

称为曲线的参数方程.

参数可以是时间 t, 也可以是其他的量,如长度、角度等,

应具体分析，适当选取.

2．几种常用曲线的参数方程.

直线：　$x=x_0+\lambda t,\quad y=y_0+\mu t.$

圆：　$x=R\cos\varphi,\quad y=R\sin\varphi.$

椭圆：　$x=a\cos\varphi,\quad y=b\sin\varphi.$

渐开线：　$r=\dfrac{r_0}{\cos\alpha},\quad \theta=\operatorname{tg}\alpha-\alpha.$

摆线：　$x=r_0(\varphi-\sin\varphi),\quad y=r_0(1-\cos\varphi).$

习　题

1．已知曲线的参数方程是

$$x=\frac{t}{2},\quad y=1+\frac{t^2}{2},$$

(1) 求曲线上对应于 $t=0, \pm2, \pm4$ 的点的坐标 (x, y)，并描点作出曲线；

(2) 消去参数 t，说明它是什么曲线.

2．已知物体的运动方程是

$$x=v_0t\cos\alpha,\quad y=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2,$$

求运动轨迹的直角坐标方程.

3．写出下列曲线的参数方程：

(1) $x^2+y^2=25$;　　(2) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

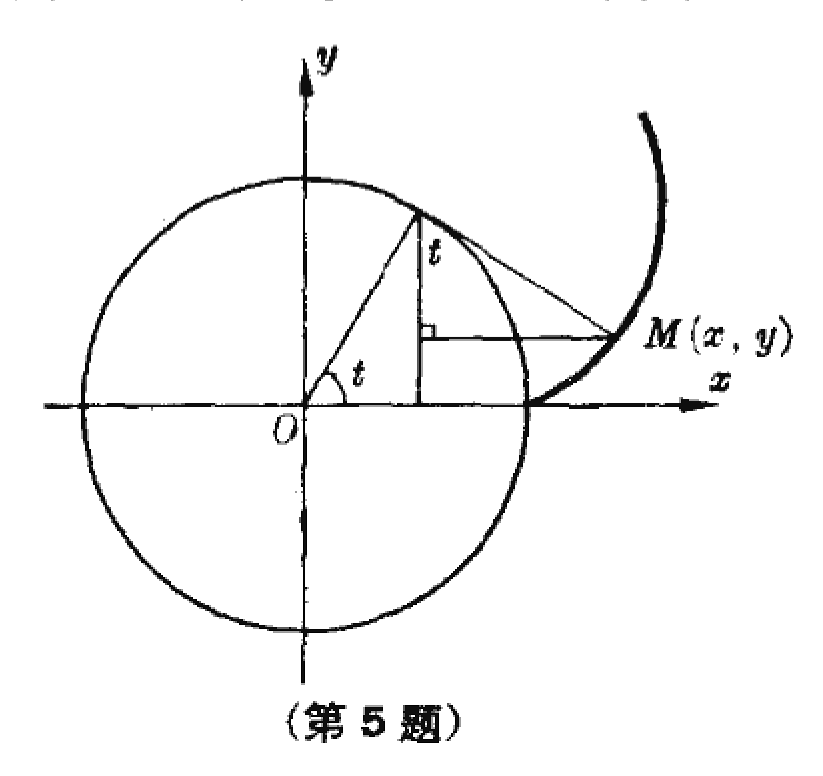
(3) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$;　　(4) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

4．已知渐开线方程是

$$r=\frac{1}{\cos\alpha},\quad \theta=\operatorname{tg}\alpha-\alpha,$$

求曲线上对应于 $\alpha=0, \dfrac{\pi}{15}, \dfrac{2}{15}\pi, \dfrac{\pi}{5}, \dfrac{4}{15}\pi, \dfrac{\pi}{3}$ 的点的极坐标，并利用这些点描出渐开线的部分图形.

5. 求渐开线在直角坐标系下的参数方程(见图).



(第 5 题)

6. 设 $M(x, y)$ 在圆周 $x=R\cos\varphi$, $y=R\sin\varphi$ 上运动, 过 M 作 x 轴的垂线, 交 x 轴于 Q, 求 MQ 的中点 P 的轨迹的参数方程.

复 习 题

1. 有一凸轮, 其边缘离中心最近和最远点的距离是 R 和 $R+H$, 如果凸轮两段对称曲线使从动杆作往复等速运动, 求每段曲线的极坐标方程.

2. 某自动车床需要这样一个凸轮: 凸轮顺时针方向等角速转 3° 时, 从动杆从最低位置 A 沿直线等速上升, 到达 B 点; 凸轮再转 117° 时, 从动杆由 B 点沿直线等速上升, 到达最高点 C; 凸轮再转 60° 时, 从动杆在最高位置 C 静止不动; 凸轮再转 60° 时, 从动杆沿直线等速下降到 A; 凸轮再转 120° 时, 从动杆静止不动, 若凸轮轴心到凸轮边缘最短距离为 4.5 厘米, $AB=0.5$ 厘米, $AC=3$ 厘米, 试写出凸轮轮廓各段曲线的极坐标方程, 并画出凸轮的轮廓线.

3. 某等速螺线共有三圈, 螺线上距中心最近距离是 20 厘米, 最远距离是 35 厘米, 求这螺线的方程.

4. 证明极坐标方程 $r\cos(\theta-\theta_0)=p$ 表示一条直线, 求出该直线与极轴的夹角以及极点到该直线的距离.

5. OR 是圆 $r=a\cos\theta$ 的弦, 延长 OR 到 P 使 $RP=a$, 当 R 在圆上移动时, 求 P 点轨迹的方程, 并说明这是一条什么曲线.

6. 过圆 $x=5\cos\varphi, y=5\sin\varphi$ 上的定点 (3, 4) 作圆的弦, 求弦中点的轨迹的方程.

7. 消去参数 φ, 说明

$$x=\frac{a}{\cos\varphi}, \quad y=b\,\mathrm{tg}\varphi$$

是双曲线的参数方程.

8. 已知弹道曲线的参数方程为

$$x=v_0t\cos\alpha, \quad y=v_0t\sin\alpha-\frac{g}{2}t^2,$$

其中 v_0 是炮弹的初速度, α 是炮弹的发射角.

(1) 求炮弹从发射到落回地面所需的时间;

(2) 求炮弹到达的最大高度;

(3) 求发射角 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时, 弹道曲线的直角坐标方程和射程.

9. 一动圆在一定圆上外相切地作无滑动的滚动, 动圆上一个定点的轨迹称为外摆线, 试选择适当的坐标系, 写出外摆线的参数方程.

第八章　坐标变换与二次曲线

在第五章第一节中我们曾经讲过坐标变换的概念，并就最简单的情形——坐标轴的平移，导出了它的变换式．在处理某些比较复杂的问题时，常常需要使用其他形式的坐标变换．因此，这里我们讨论一般的坐标变换，并把这个讨论与二次曲线的有关问题，如化简、分类、求方程等等结合起来．

第一节　坐标变换

点的坐标和曲线的方程是对一个确定的坐标系说的，同一个点在不同的坐标系中有不同的坐标；同样，同一条曲线在不同的坐标系中也有不同的方程．通过坐标变换，可以化简曲线的方程，以便于讨论．

所谓坐标变换公式，是指从一个坐标系变换到另一个坐标系时，平面上同一个点在这两个坐标系中的坐标之间的换算公式．为了叙述方便，我们把变换前的坐标系称为旧坐标系．点在旧坐标系中的坐标称为旧坐标；变换以后的坐标系称为新坐标系，点在新坐标系中的坐标称为新坐标．

一、移　　轴

在第五章第一节中，我们已经学过坐标轴的平移，导出移轴公式．设坐标系 $O'x'y'$ 是由坐标系 Oxy 移轴得到的，它的原点 O' 在旧坐标系中的坐标为 $(a,\ b)$，平面上任意点 P 的

新、旧坐标分别记为(x', y')和(x, y)，则它们之间有下述换算公式：

$$x=x'+a, \quad y=y'+b \tag{1}$$

或

$$x'=x-a, \quad y'=y-b. \tag{2}$$

式(1)和式(2)都称为移轴公式.

二、转　　轴

将整个坐标系绕原点旋转一个角度，得到一个新的坐标系，这种变换称为坐标轴的旋转，简称转轴（图 8-1）.

转轴由坐标轴旋转的角度决定．我们规定按逆时针方向的转角为正.

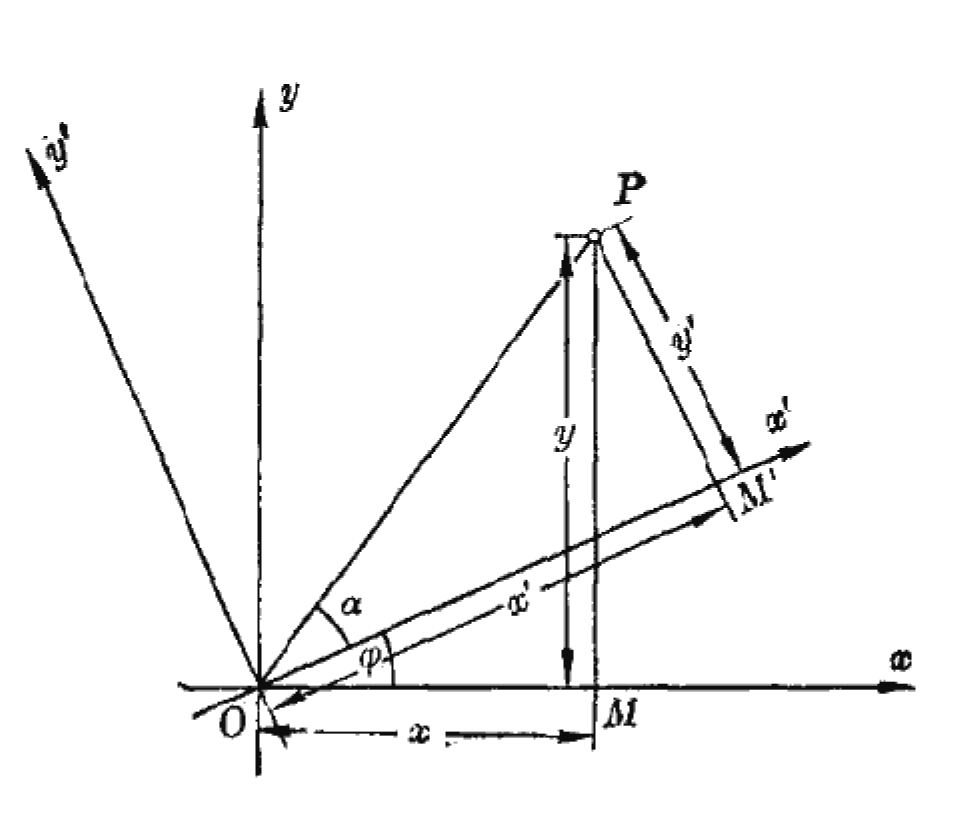


图　8-1

如图 8-1，设坐标系 $Ox'y'$ 是由坐标系 Oxy 转轴得到的，坐标轴旋转的角度为 φ，平面上任意点 P 的新、旧坐标分别记为(x', y')和(x, y)，我们来导出它们之间的换算公式.

过P点分别作x轴和x'轴的垂线 PM 和 PM' (M, M'是垂足)，连接OP，设 $\angle POM'=\alpha$，则

$$x'=OP\cos\alpha, \quad y'=OP\sin\alpha;$$

$$x=OP\cos(\alpha+\varphi), \quad y=OP\sin(\alpha+\varphi).$$

利用三角中的和角公式，将后两式展开，再将前两式代入得

$$x=OP\cos\alpha\cos\varphi-OP\sin\alpha\sin\varphi$$
$$=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,$$
$$y=OP\cos\alpha\sin\varphi+OP\sin\alpha\cos\varphi$$
$$=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi,$$

即

$$\left.\begin{aligned}x&=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\\y&=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

为了得到新坐标的表达式，从式(3)解出 x', y'，得

$$\left.\begin{aligned}x'&=x\cos\varphi+y\sin\varphi,\\y'&=-x\sin\varphi+y\cos\varphi.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

式(3)和式(4)都称为转轴公式.

[例 1] 将坐标轴旋转 $\frac{\pi}{4}$，求点 $P(0,-2)$ 在新坐标系中的坐标 (x', y').

解：将 $x=0$, $y=-2$, $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 代入式(4)得

$$x'=-\sqrt{2},\quad y'=-\sqrt{2},$$

所以点 P 的新坐标为 $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

我们还可以从另一角度把(3)和(4)统一起来，如果把坐标系 Oxy 看作由坐标系 $Ox'y'$ 旋转 $-\varphi$ 角得到的话，那末 (x', y') 是旧坐标，(x, y) 是新坐标，由式(3)可以得到

$$x'=x\cos(-\varphi)-y\sin(-\varphi)$$
$$=x\cos\varphi+y\sin\varphi,$$
$$y'=x\sin(-\varphi)+y\cos(-\varphi)$$
$$=-x\sin\varphi+y\cos\varphi,$$

这正是式(4).

上述对式(3)和式(4)的说明，同样适用于移轴公式(1)和(2).

三、一般坐标变换

现在我们考察新坐标系和旧坐标系有任意相对位置的情况，即一般的坐标变换.

设 Oxy 和 $O'x'y'$ 是平面上两个坐标系，它们的相对位置，由新坐标系的原点 O' 在旧坐标系中的坐标 (a, b) 以及 x 轴到 x' 轴的转角 φ 确定(图 8-2).

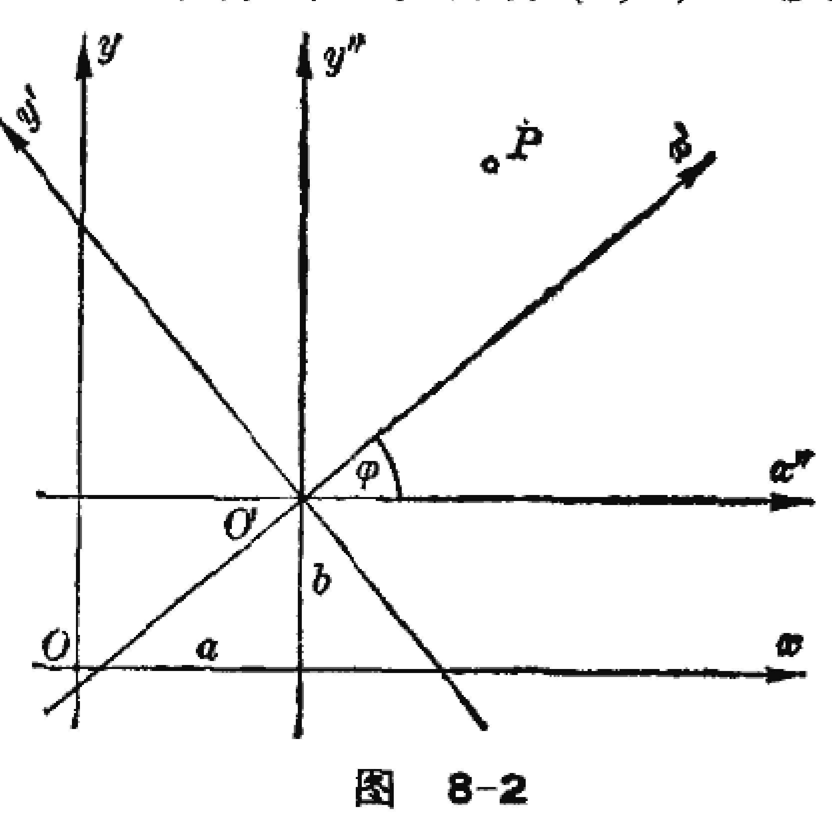


图 8-2

为了求得这种一般情况下的坐标变换公式，我们把这种变换看作是分两步完成的：第一步把旧坐标系 Oxy 平移，使原点移到 O' 处，得到一个"过渡的"坐标系 $O'x''y''$；第二步把坐标系 $O'x''y''$ 旋转 φ 角，得到新坐标系 $O'x'y'$.

分别以 (x, y)、(x', y') 和 (x'', y'') 记平面上任意点 M 在坐标系 Oxy、$O'x'y'$ 和 $O'x''y''$ 中的坐标，则由移轴公式得

$$x = x'' + a, \quad y = y'' + b,$$

再由转轴公式得

$$x'' = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi,$$
$$y'' = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$

把这一变换式代入前面的变换式，得到

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + a, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + b. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

为了得到新坐标的表达式，从式(5)解出 x', y'，得，

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\varphi + (y-b)\sin\varphi, \\ y' &= -(x-a)\sin\varphi + (y-b)\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式(5)和式(6)都称为一般坐标变换公式.

[例 2] 设新坐标系的原点 O' 在旧坐标系中的坐标为 $(2, 0)$，坐标轴旋转 $\frac{\pi}{3}$，平面上点 M 的旧坐标为 $\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，试求它的新坐标 (x', y').

解：将 $a=2, b=0, x=\frac{5}{2}, y=\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}, \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

代入式(6)，得

$$x'=1, \quad y'=0,$$

所以点 M 的新坐标为 $(1, 0)$.

四、曲线方程变形举例

对于给定的曲线方程，为了了解这曲线的形状和位置，常常通过适当的坐标变换，使方程变成我们熟知的形式. 例如在第六章中，我们曾利用移轴公式，把曲线方程 $y=ax^2+bx+c$ 化成标准形式 $y'=ax'^2$，从而知道它表示一条抛物线. 这里我们再举一个运用旋转变换的例子.

[例 3] 把坐标轴旋转 $\frac{\pi}{4}$，试求曲线 $2xy=a^2$ 在新坐标系中的方程.

解：因为 $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由式(5)得

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'), \quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'),$$

把它们代入方程 $2xy=a^2$，得到

$$x'^2-y'^2=a^2.$$

上式是双曲线的标准方程，这双曲线的实半轴和虚半轴相等（这种双曲线称为等轴双曲线），并且容易验证，它的渐近线恰是原来坐标系的两条坐标轴(图 8-3)．由此可知，反比函数 $y=\dfrac{a^2}{2x}$ 的图形是以坐标轴为渐近线的等轴双曲线．同时，从这例子中我们看到，利用转轴可以把双曲线方程 $2xy=a^2$ 化成标准形式．至于在一般情况下如何利用坐标变换来化简曲线方程的问题，我们留到下节讨论．

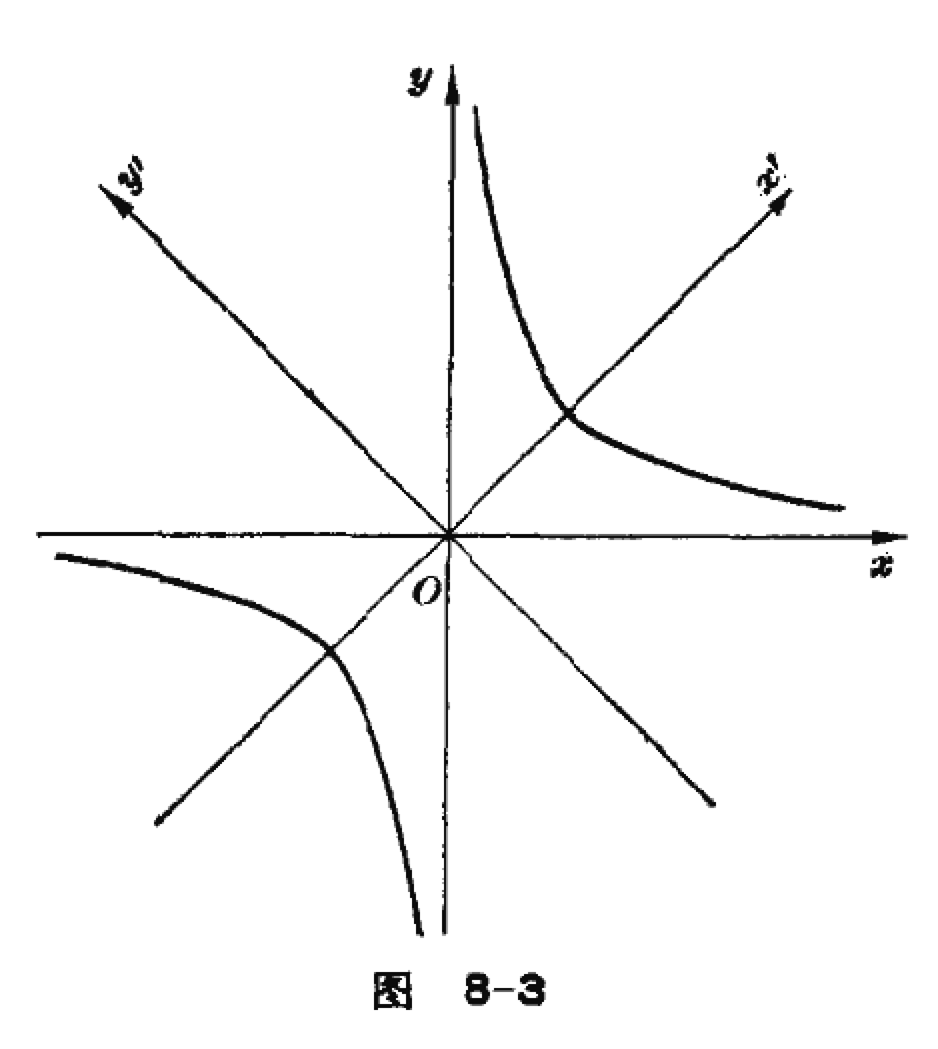


图 8-3

下面介绍坐标变换的另一个应用．

大家知道，如果坐标系选得适当，曲线的方程就比较容易求得$\left(\text{例如，在以对称轴为坐标轴的坐标系中，椭圆的方程为 } \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\right)$．因此，为求出曲线在某个给定的坐标系中的方程，我们往往先选一个适当的坐标系，求出曲线在这个坐标系中的方程，再利用坐标变换公式导出曲线在原来坐标系中的方程．

［例 4］ 已知椭圆的长、短半轴分别为 $a=4$，$b=3$，中心为 $O\ (0,\ 0)$，短轴的倾角为 $\dfrac{\pi}{4}$，试求这椭圆的方程．

解：以椭圆的对称轴为坐标轴建立坐标系 $Ox'y'$，且设短轴在 x' 轴上(图 8-4)，则在坐标系 $Ox'y'$ 中椭圆的方程为

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{16}=1.$$

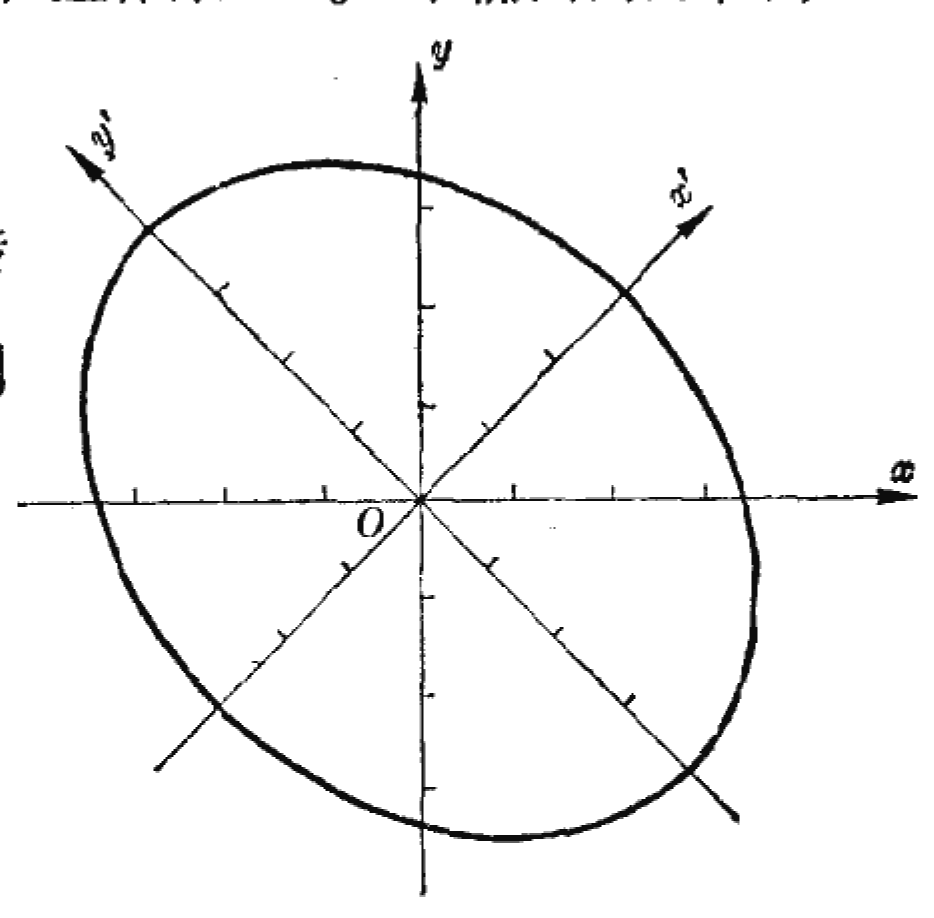


图 8-4

因为 x 轴到 x' 轴的转角为 $\frac{\pi}{4}$，所以由 Oxy 到 $Ox'y'$ 的坐标变换公式为

$$x'=x\frac{\sqrt{2}}{2}+y\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y'=-x\frac{\sqrt{2}}{2}+y\frac{\sqrt{2}}{2},$$

代入上面椭圆的方程，得

$$(x+y)^2\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}+(-x+y)^2\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}=1,$$

化简得

$$25x^2+14xy+25y^2-288=0,$$

这就是所求椭圆的方程.

[例 5] 已知抛物线的对称轴为 $x+y+1=0$，顶点为 $O'(0,-1)$，且抛物线过原点 $(0,0)$. 试求抛物线的方程.

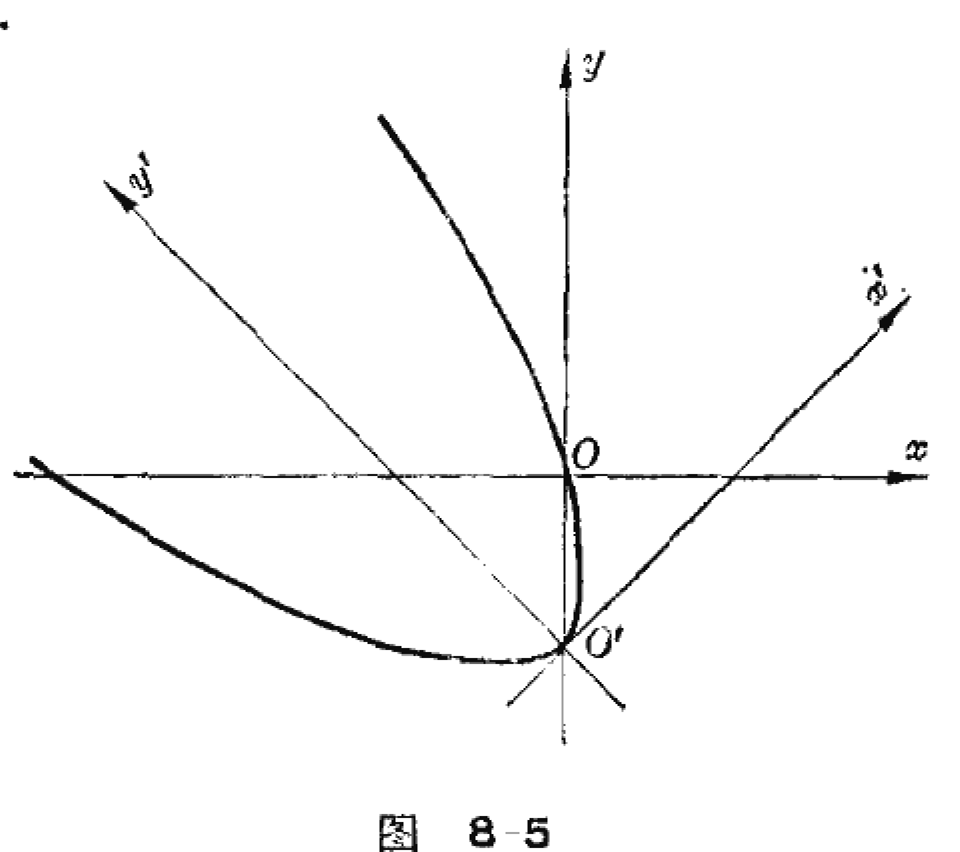


图 8-5

解：如图 8-5 建立新坐标系 $O'x'y'$，它的原点为 $O'(0,-1)$，y' 轴为直线 $x+y+1=0$. 容易验

证，y' 轴的倾角为 $\frac{3}{4}\pi$，所以 x' 轴的倾角为$\frac{\pi}{4}$. 于是，由 Oxy 到 $O'x'y'$ 的坐标变换公式为

$$x' = x\frac{\sqrt{2}}{2} + (y+1)\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y' = -x\frac{\sqrt{2}}{2} + (y+1)\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

根据题意，抛物线在坐标系 $O'x'y'$ 中的方程可设为

$$y' = ax'^2,$$

其中 a 是待定常数，抛物线过点 O，以 O 的新坐标$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$代入上面方程，得

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = a\cdot\frac{1}{2}, \quad 即 \quad a = \sqrt{2}.$$

所以抛物线在 $O'x'y'$ 中的方程为

$$y' = \sqrt{2}x'^2.$$

以上面坐标变换公式代入，得到抛物线在原坐标系中的方程

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y+1) = \sqrt{2}\frac{1}{2}(x+y+1)^2,$$

化简得

$$x^2+y^2+2xy+3x+y=0,$$

这就是所求抛物线的方程.

第二节 二次曲线

我们知道，椭圆、双曲线和抛物线的标准方程都是坐标 x、y 的二次方程，根据标准方程，可以立即确定曲线的形状和位置．现在考虑相反的问题：一般二次方程表示怎样的曲线，

如何确定二次方程所表示的曲线的类型、形状和位置．本节将以坐标变换为工具，解决这些问题．

在平面直角坐标系中，二元二次方程

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{7}$$

所表示的曲线称为二次曲线，方程(7)称为二次曲线的一般方程．

一、二次曲线一般方程的化简

为了确定二次方程所表示的曲线，我们利用坐标变换，先把方程化简．化简分两步进行．第一步是作适当的转轴变换，消去方程(7)中的交叉项 $2Bxy$，使它变成下面的形式：

$$A'x'^2+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0, \tag{8}$$

第二步是作移轴变换，消去一次项或常数项．

为了用转轴变换消去交叉项，设待求的旋转角为 φ，那末，

$$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,$$
$$y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi,$$

代入方程(7)，得

$$\begin{aligned}&A(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)^2\\&\quad+2B(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)\\&\quad+C(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)^2+2D(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)\\&\quad+2E(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)+F=0,\end{aligned}$$

合并同类项，得

$$\begin{aligned}&(A\cos^2\varphi+2B\sin\varphi\cos\varphi+C\sin^2\varphi)x'^2\\&\quad+2[(C-A)\sin\varphi\cos\varphi+B(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)]x'y'\\&\quad+(A\sin^2\varphi-2B\sin\varphi\cos\varphi+C\cos^2\varphi)y'^2\\&\quad+2(D\cos\varphi+E\sin\varphi)x'\\&\quad+2(-D\sin\varphi+E\cos\varphi)y'+F=0.\end{aligned} \tag{9}$$

要使上式变成形如(8)的方程，应选择 φ，使交叉项 $x'y'$ 的系数为零，即 φ 应满足

$$(C-A)\sin\varphi\cos\varphi+B(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=0,$$

整理得

$$\operatorname{ctg}2\varphi=\frac{A-C}{2B}. \tag{10}$$

这就是说，只要以式(10)决定的 φ 角作转轴变换，就可消去方程(7)中的交叉项，使它变为形如(8)的方程.

为进一步化简方程(8)，可以通过配方，作适当的移轴变换.

[例 1]　化简方程

$$x^2+4xy+4y^2-20x+10y-50=0,$$

说明它的图形是什么曲线.

解：先消去交叉项．按式(10)，旋转角 φ 应满足

$$\operatorname{ctg}2\varphi=\frac{A-C}{2B}=\frac{1-4}{2\times 2}=\frac{-3}{4}.$$

由三角知识，当选取 $-\frac{\pi}{2}<2\varphi<0$ 时，有

$$\cos 2\varphi=\frac{3}{5},$$

$$\sin\varphi=-\sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}}=-\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\varphi=\sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

所以，转轴公式为

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x'+y'),$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{5}}(-x'+2y'),$$

代入原方程，得到在坐标系 $Ox'y'$ 中的方程

$$\frac{1}{5}(2x'+y')^2+\frac{4}{5}(2x'+y')(-x'+2y')+\frac{4}{5}(-x'+2y')^2$$
$$-\frac{20}{\sqrt{5}}(2x'+y')+\frac{10}{\sqrt{5}}(-x'+2y')-50=0,$$

化简得

$$5y'^2-10\sqrt{5}x'-50=0,$$

即

$$x'+\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{10}y'^2.$$

再作移轴变换

$$x''=x'+\sqrt{5}, \quad y''=y',$$

方程化简为

$$x''=\frac{\sqrt{5}}{10}y''^2.$$

这是抛物线的标准方程，所以所给方程的图形是抛物线.

[例 2] 化简方程

$$5x^2+12xy-22x-12y-19=0,$$

说明它的图形是什么曲线.

解：先消去交叉项. 按式(10)，旋转角 φ 应满足

$$\operatorname{ctg} 2\varphi=\frac{A-C}{2B}=\frac{5}{12},$$

取 $0<2\varphi<\frac{\pi}{2}$，则

$$\cos 2\varphi=\frac{5}{13}, \quad \sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{13}},$$

所以，转轴公式为

$$x=\frac{1}{\sqrt{13}}(3x'-2y'), \quad y=\frac{1}{\sqrt{13}}(2x'+3y'),$$

代入原方程，得到在坐标系 $Ox'y'$ 中的方程

$$\frac{5}{13}(3x'-2y')^2+\frac{12}{13}(3x'-2y')(2x'+3y')$$
$$-\frac{22}{\sqrt{13}}(3x'-2y')-\frac{12}{\sqrt{13}}(2x'+3y')-19=0,$$

整理得

$$117x'^2-52y'^2-90\sqrt{13}x'+8\sqrt{13}y'-247=0,$$

配方得

$$117\left(x'-\frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2-52\left(y'-\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2-468=0.$$

再作移轴变换

$$x''=x'-\frac{5}{\sqrt{13}},\qquad y''=y'-\frac{1}{\sqrt{13}},$$

则在坐标系 $O''x''y''$ 中方程为

$$117x''^2-52y''^2-468=0,$$

即

$$\frac{x''^2}{4}-\frac{y''^2}{9}=1.$$

因此，所给方程的图形为双曲线，它的实半轴和虚半轴分别是 2 和 3.

坐标系 $O''x''y''$ 的顶点 O'' 在坐标系 $Ox'y'$ 中的坐标为 $\left(\frac{5}{\sqrt{13}},\ \frac{1}{\sqrt{13}}\right)$，在 Oxy 中的坐标则为

$$x=\frac{1}{\sqrt{13}}\left(\frac{15}{\sqrt{13}}-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)=1,$$
$$y=\frac{1}{\sqrt{13}}\left(\frac{10}{\sqrt{13}}+\frac{3}{\sqrt{13}}\right)=1,$$

x'' 轴平行于 x' 轴，所以 x 轴到 x'' 轴的转角即为 φ，由此容易作出坐标系 $O''x''y''$ 和所给方程的图形，留给读者自己来作.

［例 3］ 化简方程

$$12x^2-4y^2-12x-8y-1=0.$$

解：因为方程没有交叉项，我们可以直接用移轴变换把它化简．配方得

$$12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-4(y+1)^2=0,$$

作移轴变换

$$x'=x-\frac{1}{2},\quad y'=y+1,$$

则原方程化简为

$$3x'^2-y'^2=0,$$

即

$$\sqrt{3}\,x'-y'=0,$$
$$\sqrt{3}\,x'+y'=0,$$

因此它的图形是两条过新坐标系原点的相交直线．

在本例中，我们可以不通过移轴变换，对原方程右端进行因式分解，直接得到这两条直线在坐标系 Oxy 中的方程

$$\sqrt{3}\,x-y-\frac{\sqrt{3}}{2}-1=0,$$

$$\sqrt{3}\,x+y-\frac{\sqrt{3}}{2}+1=0.$$

二、二次曲线的分类

从上面一些例子中我们看到，有的二次曲线是椭圆，有的是双曲线或抛物线，也有的是两条直线．那末，二次曲线到底有哪些类型呢？下面我们就来讨论这个问题．

因为任何一个二元二次方程通过适当的转轴变换，都可以使它不含交叉项，所以，在讨论二次曲线的分类时，我们可

以从没有交叉项的二次方程出发，即设方程为

$$A'x'^2+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0. \tag{8}$$

下面分几种情况来讨论.

1. A' 和 C' 都不为 0

这时上面方程经配方可写成

$$A'\left(x'+\frac{D'}{A'}\right)^2+C'\left(y'+\frac{E'}{C'}\right)^2+F'-\frac{D'^2}{A'}-\frac{E'^2}{C'}=0.$$

作移轴变换

$$x''=x'+\frac{D'}{A'},\quad y''=y'+\frac{E'}{C'},$$

并设 $F'-\frac{D'^2}{A'}-\frac{E'^2}{C'}=F''$，则方程变为

$$A'x''^2+C'y''^2+F''=0. \tag{11}$$

(1) 如果 A' 和 C' 符号相同，则

当 A'、C' 与 F'' 的符号相反时，方程(11)表示椭圆

$$\frac{x''^2}{-\frac{F''}{A'}}+\frac{y''^2}{-\frac{F''}{C'}}=1;$$

当 $F''=0$ 时，方程(11)的图形退缩成一点；

当 A'、C' 与 F'' 的符号相同时，方程(11)不表示任何实的曲线.

这种类型的曲线称为椭圆型曲线.

(2) 如果 A' 和 C' 符号相反，则

当 $F''\neq 0$ 时，方程(11)表示双曲线

$$-\frac{x''^2}{\frac{F''}{A'}}-\frac{y''^2}{\frac{F''}{C'}}=1;$$

当 $F''=0$ 时，方程(11)表示两条相交直线:

$$\sqrt{|A'|}x''+\sqrt{|C'|}y''=0,$$

$$\sqrt{|A'|}x''-\sqrt{|C'|}y''=0.$$

这种类型的曲线称为双曲型曲线.

2. A' 和 C' 中有一个为 0

不妨设 $A'\neq 0$, $C'=0$, 方程为

$$A'x'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0.$$

(1) 如果 $E'\neq 0$, 则方程为

$$y'=\frac{-A'}{2E'}x'^2-\frac{D'}{E'}x'-\frac{F'}{2E'},$$

它表示抛物线.

(2) 如果 $E'=0$, 方程为

$$A'x'^2+2D'x'+F'=0,$$

配方得

$$A'\left(x'+\frac{D'}{A'}\right)^2+F'-\frac{D'^2}{A'}=0. \tag{12}$$

当 A' 和 $F'-\dfrac{D'^2}{A'}$ 符号相反时, 方程(12)表示平行于 y' 轴的两条直线

$$x'+\frac{D'}{A'}+\sqrt{\frac{D'^2-A'F'}{A'^2}}=0,$$

$$x'+\frac{D'}{A'}-\sqrt{\frac{D'^2-A'F'}{A'^2}}=0.$$

当 $F'-\dfrac{D'^2}{A'}=0$ 时, 方程(12)表示平行于 y' 轴的两条重合的直线

$$x'+\frac{D'}{A'}=0.$$

当 A' 和 $F'-\frac{D'^2}{A'}$ 符号相同时，方程(12)不表示任何实的曲线.

这种类型的曲线称为抛物型曲线.

综上所述，可得下面的结论.

二次曲线有三种类型:

(1) 椭圆型曲线——椭圆、一点或没有轨迹;

(2) 双曲型曲线——双曲线或两条相交直线;

(3) 抛物型曲线——抛物线、两条平行直线、两条重合直线或没有轨迹.

它们的方程，可通过适当的坐标变换，化成在新坐标系中的最简形式.

三、二次曲线类型的判定

现在讨论如何根据方程 (7) 的系数直接判定曲线类型的问题.

由上面的讨论可知，曲线的类型由方程(8)的系数 A' 和 C' 有没有一个为零，以及两个都不为零时它们是同号还是反号来决定，也就是说，由乘积 $A'C'$ 等于零、大于零还是小于零来决定. 但方程(8)是一般方程

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{7}$$

经转轴变换后得到的，为了直接从一般方程判定曲线的类型，就需要找出 $A'C'$ 与(7)中系数的关系. 将方程 (8) 与 268 页的方程(9)比较，有

$$A'=A\cos^2\varphi+2B\sin\varphi\cos\varphi+C\sin^2\varphi,$$
$$C'=A\sin^2\varphi-2B\sin\varphi\cos\varphi+C\cos^2\varphi.$$

为了求出用 A、B、C 表示 $A'C'$ 的公式，我们利用恒等式

$$A'C'=\frac{1}{4}[(A'+C')^2-(A'-C')^2],$$

将 A' 和 C' 的表达式分别相加和相减，得

$$A'+C'=A+C,$$

$$A'-C'=(A-C)\cos 2\varphi+2B\sin 2\varphi.$$

由于 $\operatorname{ctg} 2\varphi=\frac{A-C}{2B}$，所以

$$\sin 2\varphi=\frac{\pm 2B}{\sqrt{(A-C)^2+4B^2}},$$

$$\cos 2\varphi=\frac{\pm(A-C)}{\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}$$

(其中符号同时取＋号或－号)．代入前面式子得

$$A'-C'=\pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2},$$

因此

$$A'C'=\frac{1}{4}[(A+C)^2-(A-C)^2-4B^2]=AC-B^2.$$

这样，我们就可以根据 $AC-B^2$ 大于、小于或等于零来判定二次曲线的类型．于是，根据上段的讨论，可概括成下表：

二次曲线: $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$			
条　　件	类　　型	图　　　形	
		一般情形	特殊情形
$AC-B^2>0$	椭圆型	椭　圆	一点或没有轨迹
$AC-B^2<0$	双曲型	双曲线	两条相交直线
$AC-B^2=0$	抛物型	抛物线	两条平行直线、重合直线或者没有轨迹

附带指出，$AC-B^2$ 是坐标变换下的一个不变量，就是说，如果方程(7)经过坐标变换后变为

$$A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0,$$

那末一定有

$$AC-B^2=A'C'-B'^2.$$

事实上，因为移轴不改变二次项系数 A、B、C，所以我们只要看转轴变换的情形就可以了．设 $Ox'y'$ 是由 Oxy 旋转任意一个角度得到的坐标系，$Ox''y''$ 是由 Oxy 旋转一个满足式(10)的角度得到的坐标系，则由上面证明的事实，有

$$A''C''=AC-B^2,$$

$$A''C''=A'C'-B'^2,$$

即

$$AC-B^2=A'C'-B'^2,$$

这就证明了 $AC-B^2$ 是坐标变换下的不变量．

不变量作为一个与坐标系无关的量，它必然反映图形本身的几何性质，因此，利用不变量研究图形性质正是解析几何中的一个有效方法，我们这里不讲述它．读者可自行验证，两点间的距离、两直线间的夹角都是坐标变换下的不变量．

习　题

1．平移坐标轴，把原点移到 $O'(-4,5)$，求下列各点的新坐标，并画出新旧坐标轴和各点：

$A(3,-6)$；　$B(7,0)$；　$C(-4,5)$；　$D(0,-8)$．

2．把坐标轴绕原点按：

(1) 逆时针方向转 $\frac{\pi}{2}$；　(2) 顺时针方向转 $\frac{\pi}{2}$；

(3) 逆时针方向转 $\frac{\pi}{4}$；　(4) 顺时针方向转 $\frac{\pi}{3}$，

求 $A(2,-3)$、$B(-1,5)$ 两点的新坐标．

3. 利用坐标轴的平移，化简下列二次方程，并作图:

(1) $y^2+8x-16=0$;　　(2) $3x^2+2y^2-6y-1=0$;

(3) $3x^2-6x+y=0$;　　(4) $x^2-2y^2-4x+2y-1=0$.

4. 旋转坐标轴，消去下列各方程中的交叉项，并作出新旧坐标轴和图形:

(1) $x^2-2xy+y^2=12$;　　(2) $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2=4$;

(3) $17x^2-16xy+17y^2=225$;　　(4) $x^2-2xy+y^2+2x+2y=0$.

5. 应用坐标变换，把下列各方程化成最简形式，并作图:

(1) $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$;

(2) $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$;

(3) $9x^2-24xy+16y^2-20x-140y+200=0$.

6. 判别下列曲线的类型:

(1) $x^2-y^2-4x-2y+1=0$;

(2) $5x^2+y^2-2x+3y-1=0$;

(3) $9x^2-6x-4y+29=0$;

(4) $3x^2-7xy+5y^2+x-3y-3=0$.

7. 已知椭圆的长轴为10，短轴为8，长轴位于直线 $x+2=0$ 上，中心在 $(-2, 3)$，求椭圆的方程，并作出图形.

8. 证明方程

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc\neq 0)$$

表示双曲线，求出它的渐近线方程.

9. 证明两点之间的距离、两直线之间的交角在坐标变换下保持不变.

10 说明坐标变换的作用. 移轴的特点是什么？转轴的特点又是什么？

第九章　初等数学应用选编

数学是求解实际问题的一种有效工具．这里收集了用初等数学解决实际问题的部分实例．希望通过这一部分的学习，在灵活掌握数学方法的同时，进一步树立实践的观点，学好数学为三大革命实践服务．

一、五角星画法

在我国人民的政治生活中，经常要用到五角星．那么，怎样准确地画出一个五角星呢？如图9-1所示，如果知道了五角星的中心O到顶点A的距离，就只要以O为中心，以OA为半径作一个圆，然后把这个圆五等分，那么所得分点就是这个五角星的五个顶点了．因此问题在于如何把一个圆五等分．这里介绍一种在实践中常用的作法．

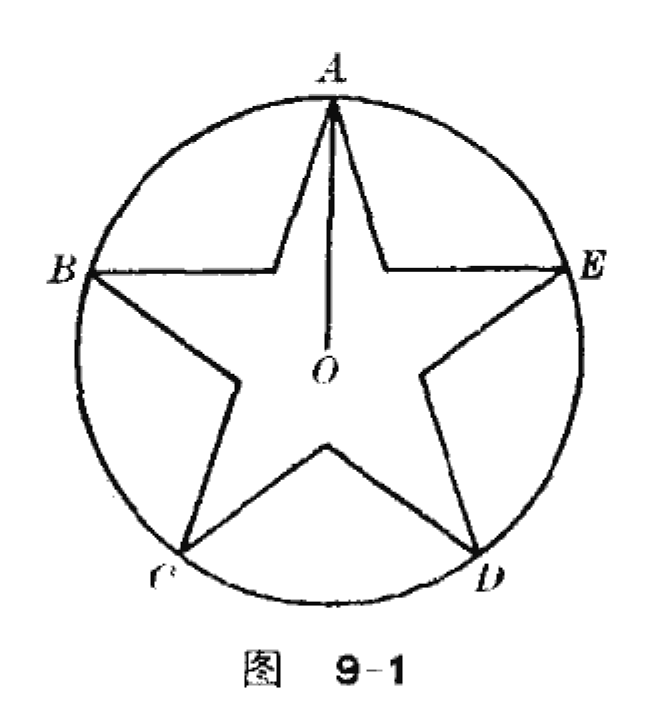


图　9-1

如图9-2所示，在圆O中画两条互相垂直的直径AA'和PP'，取OP'的中点M，以M为中心、MA为半径作弧交OP于N，然后以AN为半径，从A点开始依次在圆O上截得B、C、D、E等点，则A、B、C、D、E便是所求五等分点了．

为了说明这种作法的理由，需要从十等分圆周谈起．

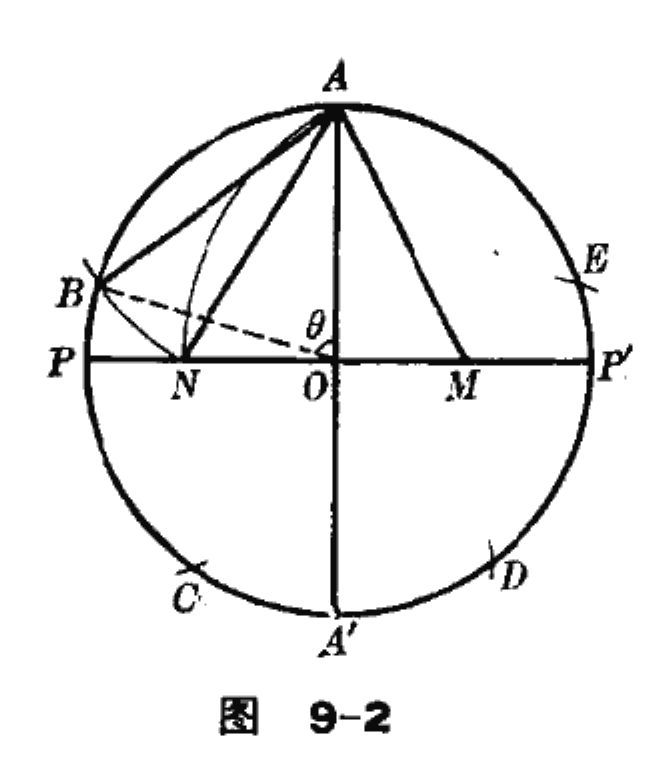


图 9-2

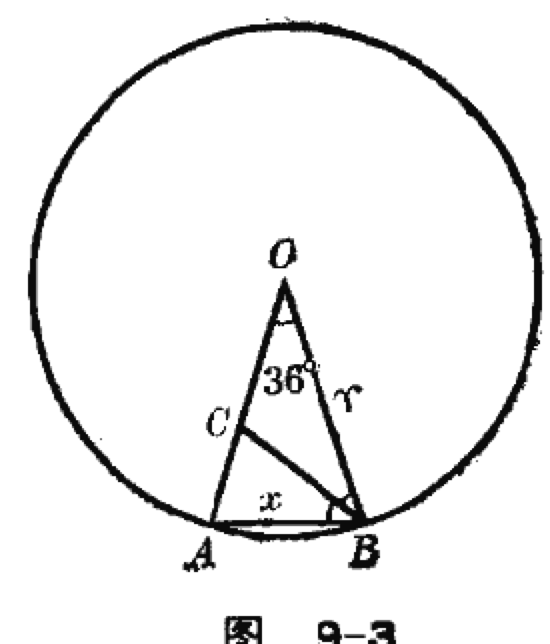


图 9-3

如图 9-3 所示，设圆 O 的半径为 r，A、B 是两相邻十等分点，连 AB，则 AB 为圆内接正十边形的一边. 易见

$$\angle AOB=\frac{360°}{10}=36°,$$

$$\angle OAB=\angle OBA=\frac{1}{2}(180°-36°)=72°.$$

如果作 $\angle OBA$ 的平分线 BC 交 OA 于 C，则 $\triangle OAB\sim\triangle BAC$，从而

$$OA:AB=AB:AC.$$

但其中 $OA=r$，又记 $AB=x$，因而

$$AC=OA-OC=OA-AB=r-x \quad (OC=CB=AB),$$

代入上式得

$$r:x=x:(r-x),$$

即

$$x^2+rx-r^2=0,$$

解得

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}r,$$

由于 $x=AB$ 总是正的，负值不适合，故

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r=\sqrt{r^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2}-\frac{r}{2}.$$

在图 9-2 中，设圆 O 半径 $OA=r$，则 $OM=\frac{r}{2}$，从而

$$MA=\sqrt{r^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2},$$

于是

$$NO=NM-OM=MA-OM=\sqrt{r^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2}-\frac{r}{2}=x,$$

就是说，NO 即为圆的内接正十边形的边长.

又在图 9-3 中，根据上面的分析，有

$$OA:AB=AB:AC,$$

但 $AB=BC=OC$，故

$$OA:OC=OC:CA,$$

象这样，把一条线段分割成两段，使整段和其中长的一段的比，等于长的一段和短的一段的比，这种分割叫做线段的中外比分割，也叫黄金分割．这样，圆的内接正十边形的边长，就等于圆的半径的中外比分割中较长的一段．这段的长等于

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\approx 0.618r,$$

如果 $r=1$，则这段的长约等于 0.618.

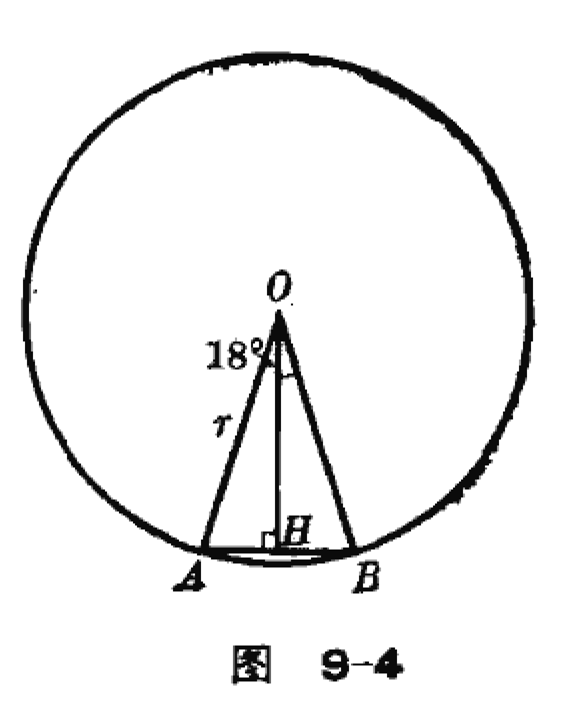


图 9-4

在图 9-4 中，AB 是圆内接正十边形的一边，$\angle AOB=36°$，OH 是 $\angle AOB$ 的平分线，由直角三角形 AOH 可得

$$\sin 18°=\frac{AH}{r}=\frac{AB}{2r}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\approx 0.309.$$

现在可以说明前面所说五等分圆周的作法的理由了．如

图 9-2 所示, 只要证明 $\angle AOB=\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$ 就行了.

记 $\angle AOB=\theta$, 则在 $\triangle OAB$ 中应用余弦定理得

$$AB^2=2r^2-2r^2\cos\theta,$$

但

$$AB^2=AN^2=OA^2+NO^2=r^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right)^2$$

$$=r^2\left(1+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{5-\sqrt{5}}{2}r^2,$$

所以

$$\cos\theta=\frac{2r^2-AB^2}{2r^2}=1-\frac{5-\sqrt{5}}{4}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$$=\sin 18^\circ=\cos 72^\circ,$$

可见

$$\theta=72^\circ.$$

二、圆形直角弯管的展开图画法

在锅炉、风道、烟道等各种管道中, 常要用到各种弯管. 制造弯管时, 都要画出它的展开图.

图 9-5 中的圆形直角弯管, 是由两个斜截成 45° 角的斜截圆柱组成的. 如图 9-6, 我们把斜截圆柱沿最短的母线 AA_1 剪开摊平, 就可得到斜截圆柱展开图.

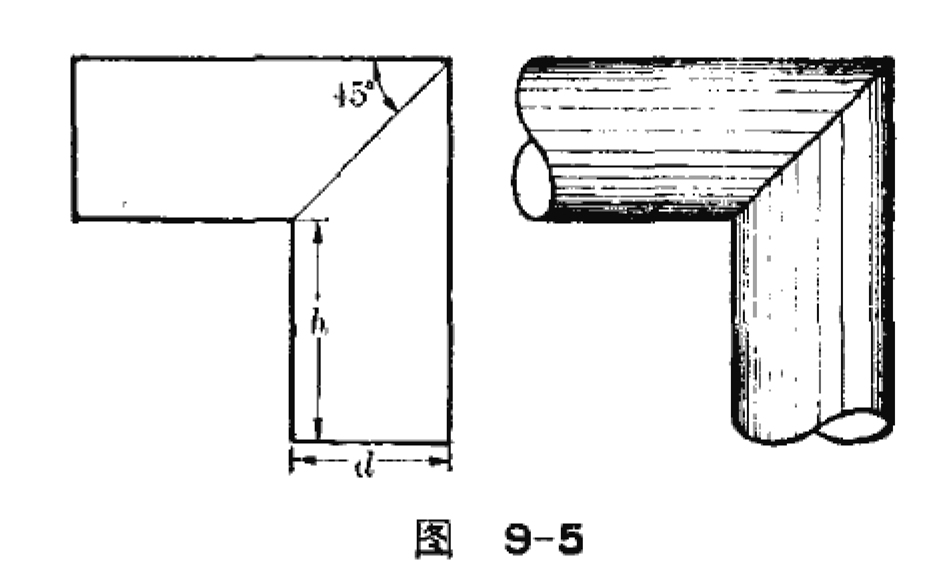


图 9-5

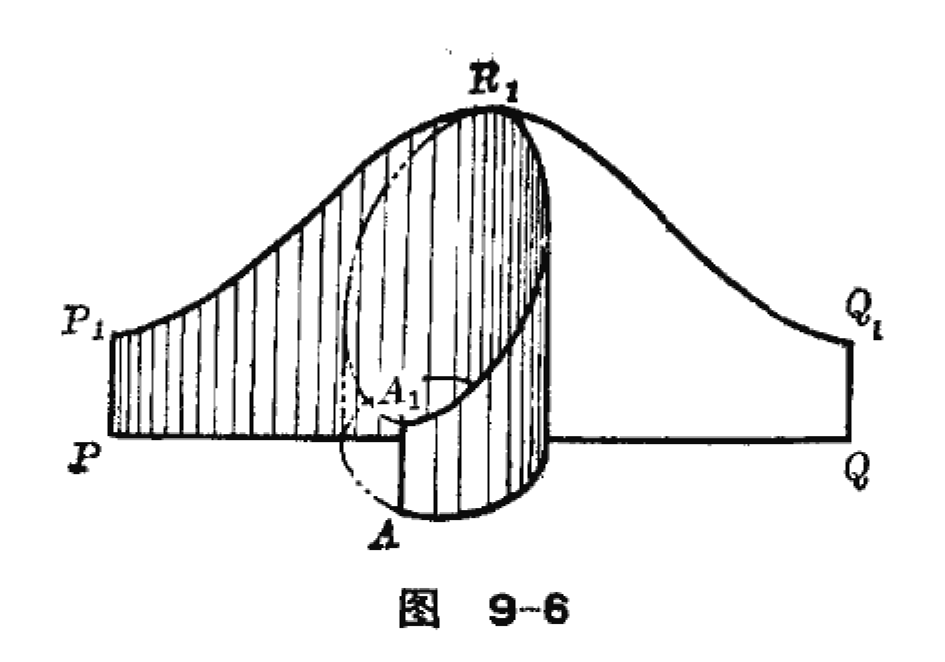


图 9-6

图 9-6 中，线段 PQ、PP_1、QQ_1 和曲线段 $\widehat{P_1R_1Q_1}$ 组成展开图的周界，三根线段的长度为

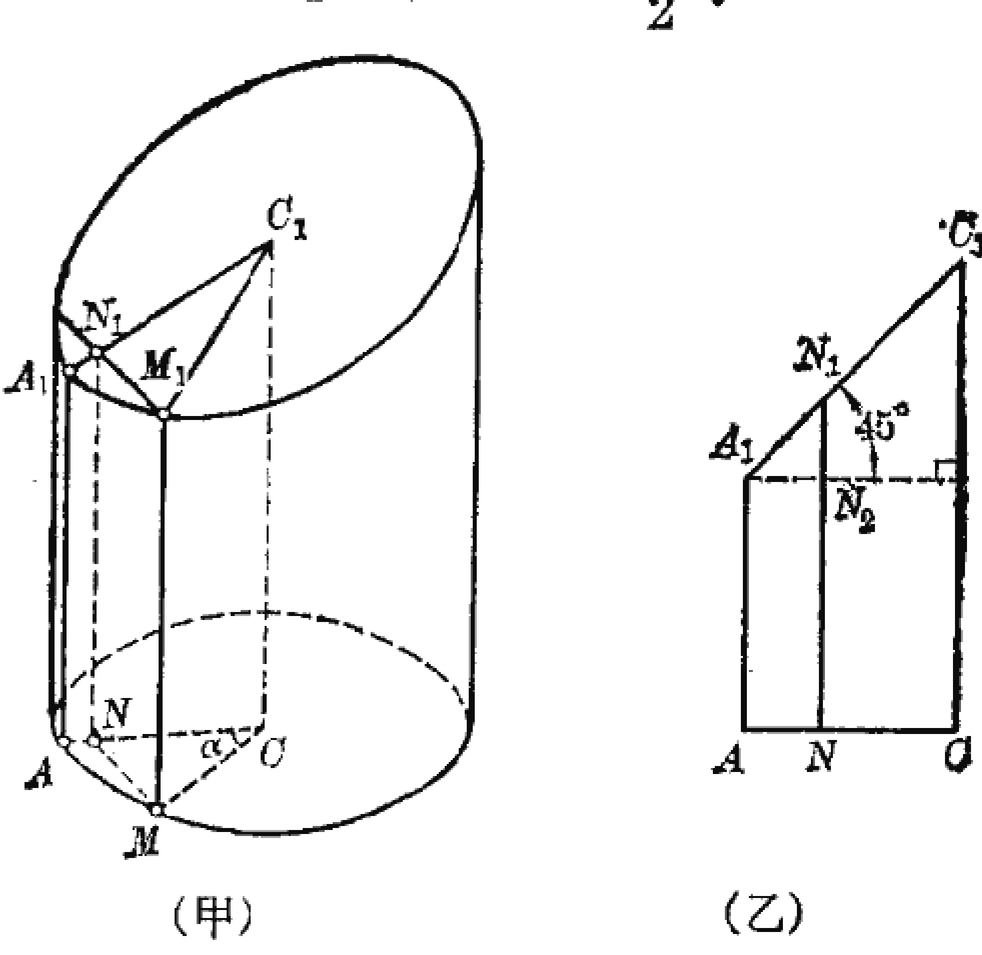
$$PP_1=QQ_1=h,\quad PQ=\pi d,$$

因此，画展开图的关键是画出曲线段 $\widehat{P_1R_1Q_1}$.

现在先讨论曲线 $\widehat{P_1R_1Q_1}$ 的方程，再讨论它的画法.

设 MM_1 是斜截圆柱的另一母线，CC_1 是圆柱中心轴(图 9-7(甲))，则

$$\widehat{AM}=CM\cdot\alpha=\frac{\alpha d}{2}.$$



(甲) (乙)

图 9-7

在截面上，过点 M_1 作 A_1C_1 的垂线交 A_1C_1 于 N_1，并过 N_1 作 $N_1N \perp AC$ 交 AC 于 N. 显然，M_1N_1 与底圆 C 平行，因而

$$MM_1 = NN_1,$$

连结 MN，从直角三角形 CNM 又得

$$CN = CM \cdot \cos\alpha = \frac{d\cos\alpha}{2},$$

于是,结合图 9-7(乙)可得

$$\begin{aligned} MM_1 = NN_1 &= NN_2 + N_2N_1 \\ &= NN_2 + A_1N_2 = NN_2 + (CA - CN) \\ &= h + \frac{d}{2}(1 - \cos\alpha). \end{aligned}$$

于是,若如图 9-8 所示的坐标系,由 OM 及 MM_1 的长度(图 9-8 中的 OM 与图 9-7 中的 $\overset{\frown}{AM}$ 等长)得到 $\overset{\frown}{P_1R_1Q_1}$ 的参数方程为

$$x = \frac{\alpha d}{2}, \quad y = h + \frac{d}{2}(1 - \cos\alpha).$$

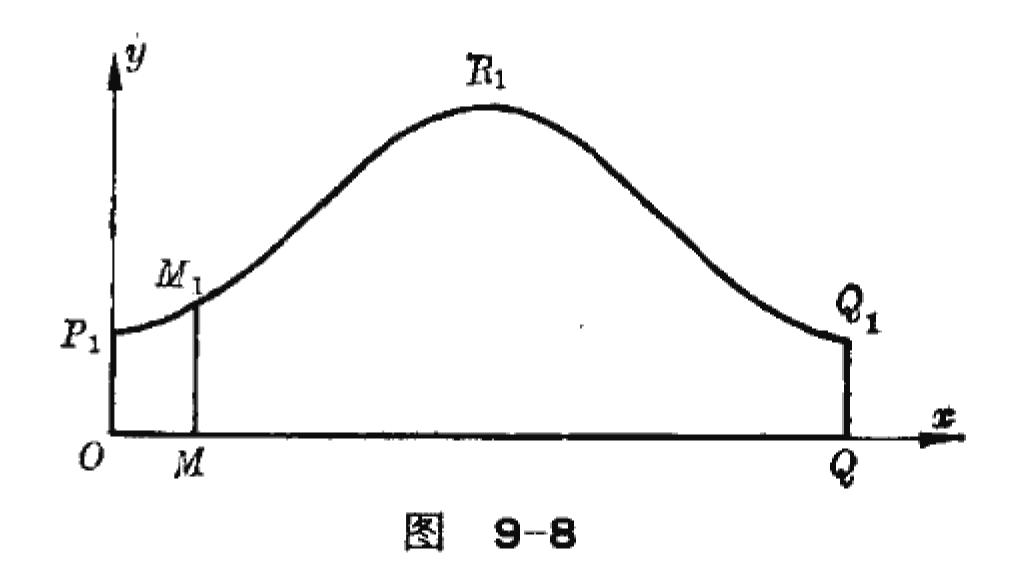


图 9-8

消去参数 α，得到它的直角坐标方程为

$$y = h + \frac{d}{2}\left(1 - \cos\frac{2x}{d}\right).$$

求得了 $\overset{\frown}{P_1R_1Q_1}$ 的方程，就可用描点法画出它的图形，从

而解决了画展开图的问题.

在生产实践中，工人师傅采用了如图 9-9 所示的更直接的画法，其想法是先在展开图中画出在斜截圆柱侧面上等距离分布的一组母线(图 9-9 中是 12 根)，然后描出整个展开图. 画图时,从图 9-9 中左方开始,先把圆周 12 等分,然后过每个分点自下向上引虚线，遇到斜截圆柱纵截面图(梯形)上边的斜线后，再自左至右引虚线. 另一方面，在图 9-9 的右方,先画出展开图的底边(长度等于圆周长),然后把它十二等分,并过每个分点自下至上画虚线,与左方过来的对应虚线得到一组交点. 把这些交点连成一条光滑的曲线，就得到圆柱侧面的展开图.

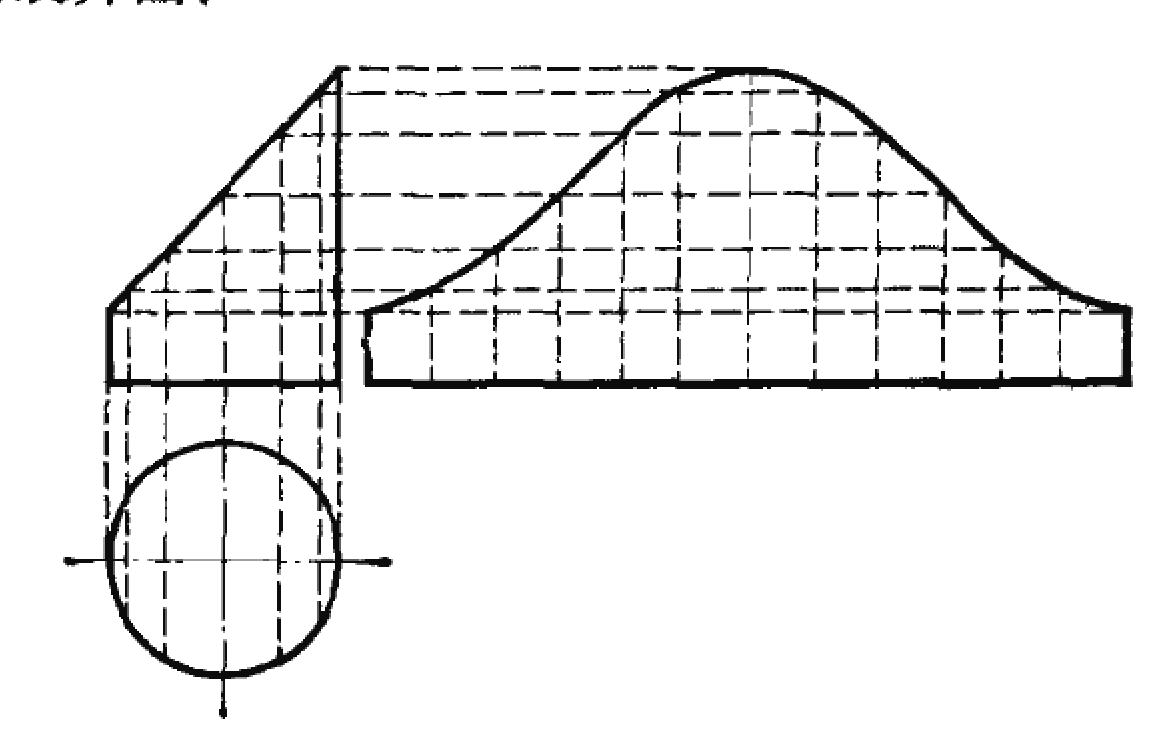


图 9-9

三、正多边形切削的数学原理

随着机械工业的不断发展，某厂加工多边形工件的数量越来越多,现有设备(刨床、铣床等专用机床)远远不能满足生产上的需要. 为了适应新的形势,工人同志遵照毛主席“**独立自主、自力更生**”的教导,发扬了敢想敢干的革命精神,经过反复实践,创造了一种结构简单的多边形切削工具,用这种工具

可以在普通车床上车削各种多边形零件，不但节省了刨床、铣床等专用设备，而且提高了工效五到十倍，为多快好省地加工多边形零件闯出了一条新路.

我们先以车削正方形零件为例来说明它的工作原理.

机床工作情况可见示意图 9-10. 刀盘夹紧在车头上，和刀盘并列地装着工件，工件的轴平行于刀盘的轴，利用齿轮的传动，使刀盘与工件转动方向相同且转速比是 2:1.

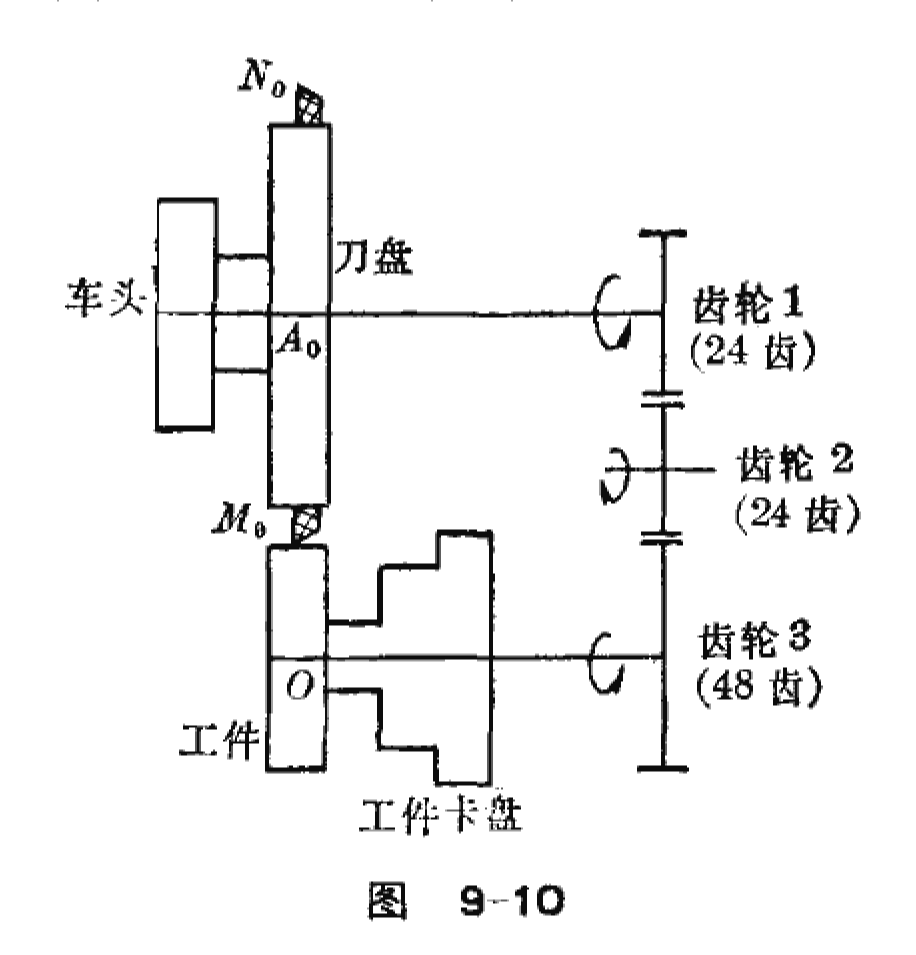


图 9-10

刀盘上装两把方向相反的车刀，加工时工件就被切削成近似的正方形. 为了从理论上证明这一点，我们来看刀尖在工件上运动的轨迹.

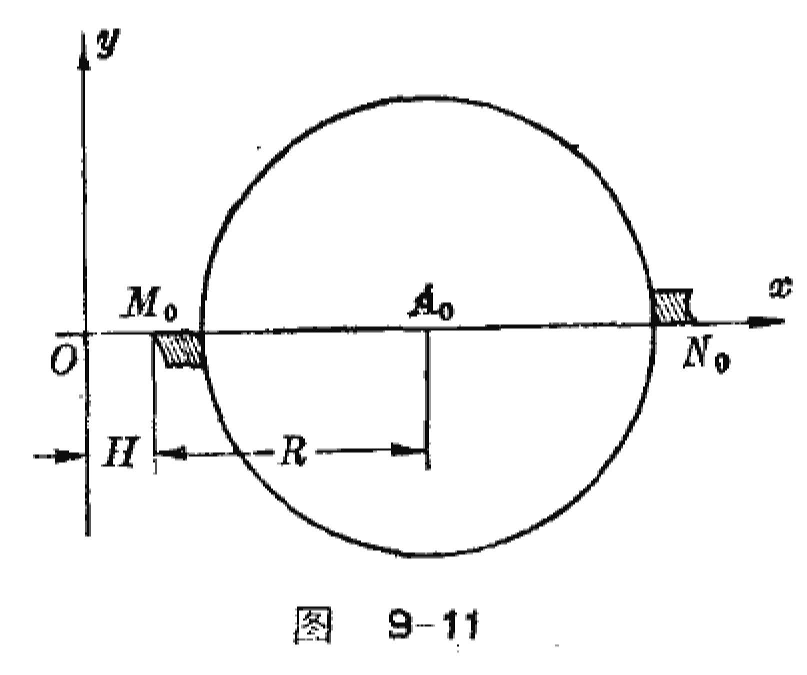


图 9-11

如图 9-11 所示，设 O 为工件的中心位置，A_0 为刀盘的中心位置，M_0 和 N_0 是刀尖的初始位置，刀盘半径（刀尖至刀盘中心的距离）为 R，且两轴线间距离 $OA_0=R+H$. 取工件中心 O 为原点，直线 OA_0 为 x 轴，建立固定在工件上的直角坐标系.

为了研究刀尖在工件上运动的轨迹，我们把工件和刀盘之间的相对运动看成工件固定不动，而刀盘中心以工件的转

速绕工件中心反方向转动，同时刀盘还绕它自己的中心转动．

这样，由于刀盘与工件的转速比是 2:1，当刀盘中心 A_0 绕 O 按逆时针方向转过 θ 角而达到点 A 时，刀尖 M_0 在刀盘上沿顺时针方向转过 2θ 角，到达 $M(x, y)$（图 9-12）．现以 θ 为参数，求 M 点运动轨迹的方程．

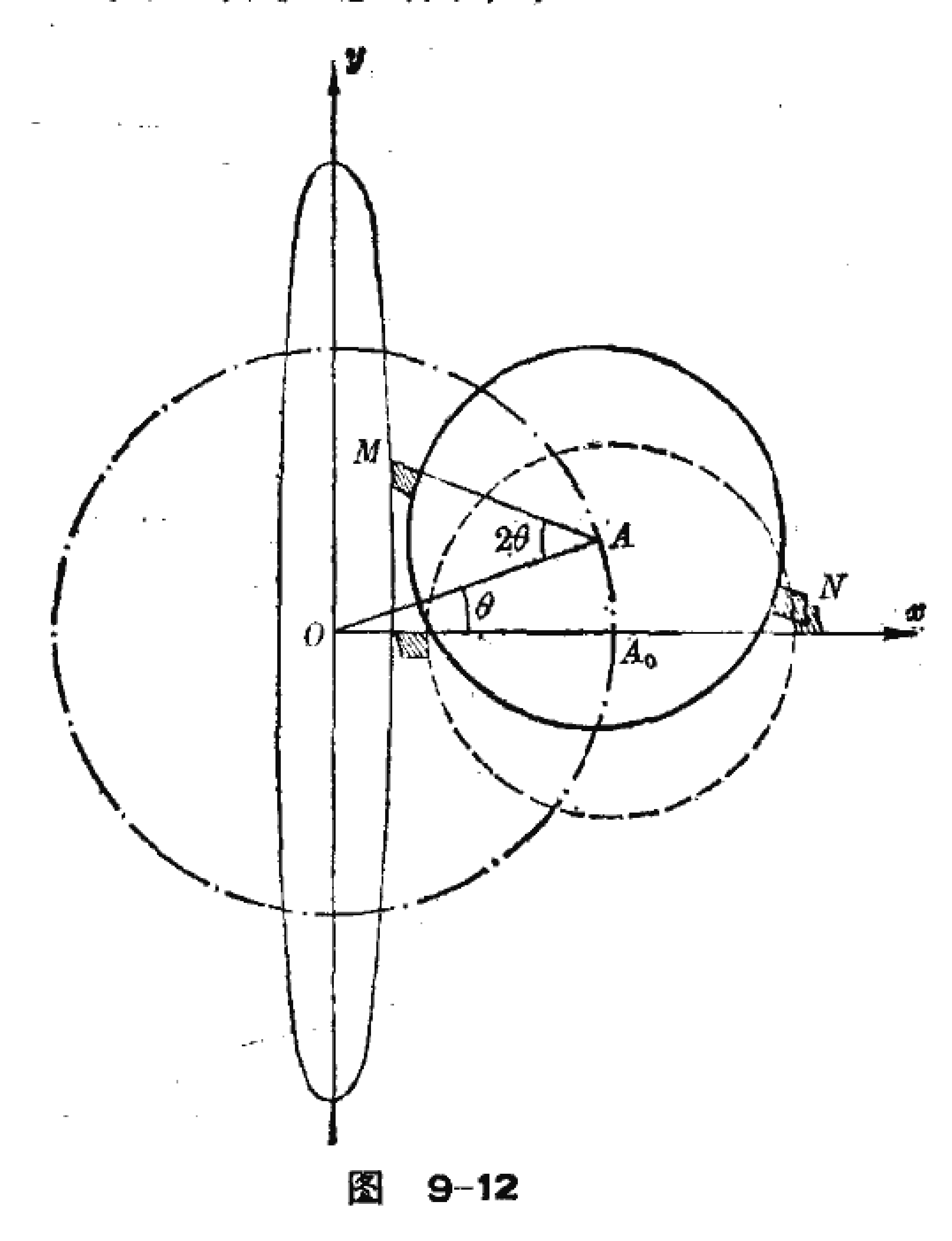


图 9-12

由图 9-13 可见

$$x=OC\cos\theta,$$

$$y=OA\sin\theta+AM\sin\theta,$$

而 $AM=R$, $OA=R+H$, $OC=H$，所以 M 点轨迹的参数方程为

$$x=H\cos\theta,$$

$$y=(2R+H)\sin\theta.$$

消去 θ 得

$$\frac{x^2}{H^2}+\frac{y^2}{(2R+H)^2}=1.$$

由此可见，刀尖 M 在工件上运动的轨迹是一个椭圆，其长半轴为 $2R+H$，短半轴为 H，长轴在 y 轴上(图 9-14)。

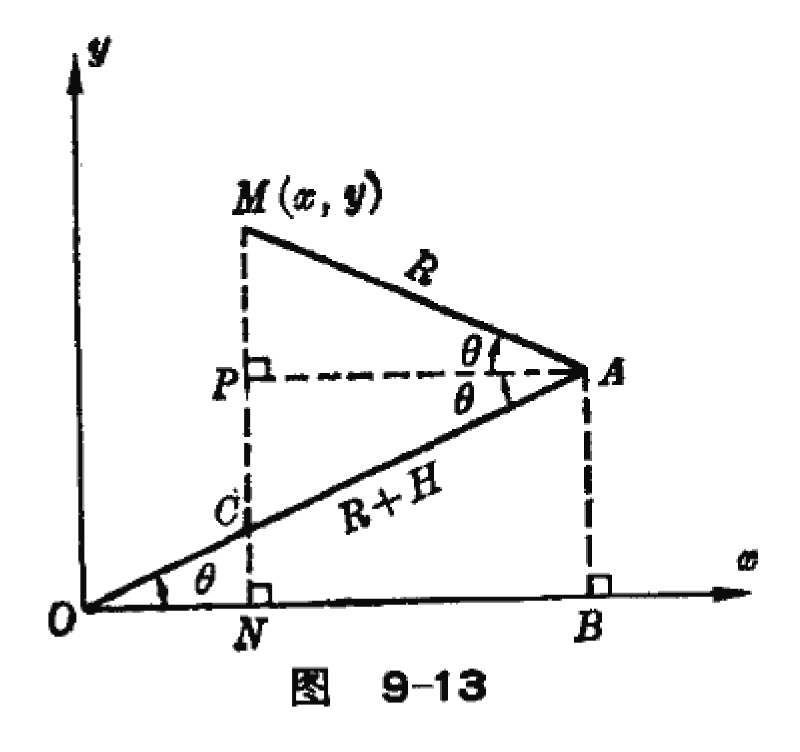


图 9-13

用同样方法，可以求出刀尖 N 在工件上运动的轨迹，它也是一个椭圆，其方程为

$$\frac{x^2}{(2R+H)^2}+\frac{y^2}{H^2}=1.$$

它与 M 点轨迹的差别仅在于图形转了 $\frac{\pi}{2}$，长轴落在 x 轴上(图 9-14)。

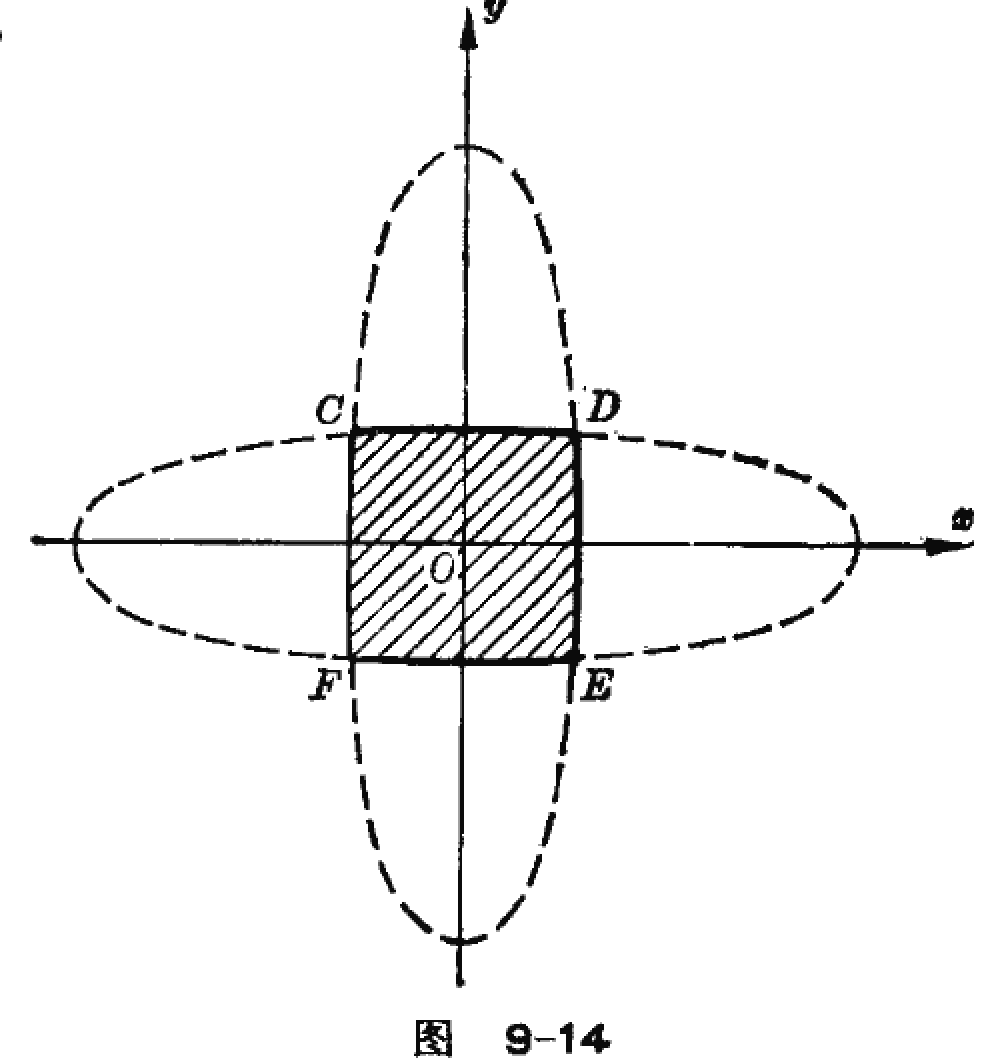


图 9-14

从图 9-14 可以看到，切削后的工件轮廓线 $CDEF$ 是由四段椭圆弧组成的，并不是真正的正方形。但是，当刀盘的半

径 R 比起 H 来很大，即椭圆的长、短半轴之差很大时，这两个椭圆很扁，这四段弧就很平直，以至于在实用范围内可以看作是正方形.

同样的道理，如果刀盘上装三把刀，彼此夹角 120°，那末工件就被切削成近似的正六边形，如图 9-15.

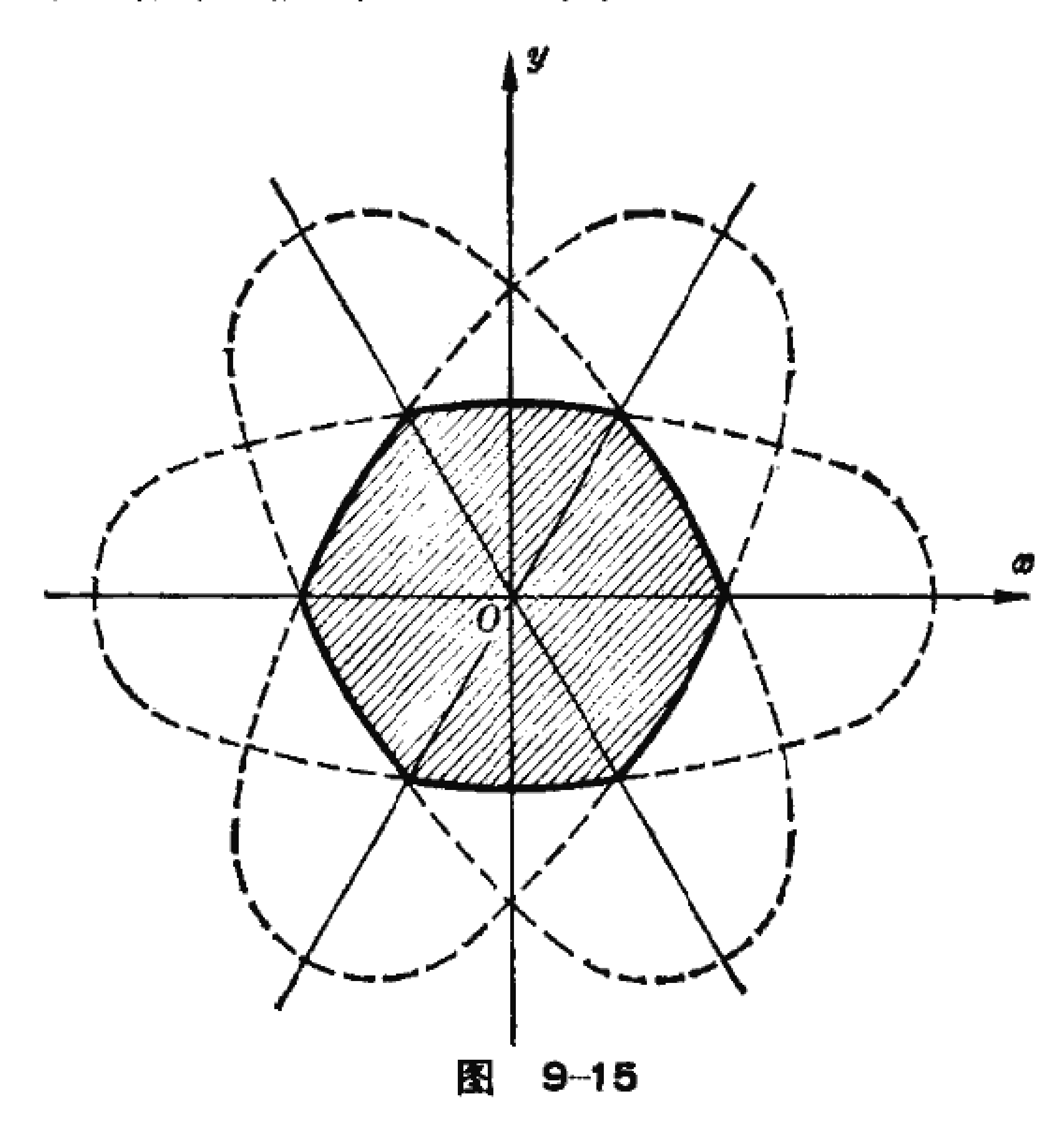


图 9-15

"在某种意义上来说，最聪明、最有才能的，是最有实践经验的战士。"工人师傅将刀具与工件的转速比，车刀的把数，车刀间的夹角和车刀的长短(不一定都相等)，这几个量加以改变，从而就加工出各种复杂形状的多边形零件来.

四、三角活塞旋转式发动机的缸体型线

三角活塞旋转式发动机是新型的发动机，它的缸体型线象个"腰子"，活塞型线是一个曲边三角形(图 9-16)．我们来讨论缸体的理论型线和实际型线.

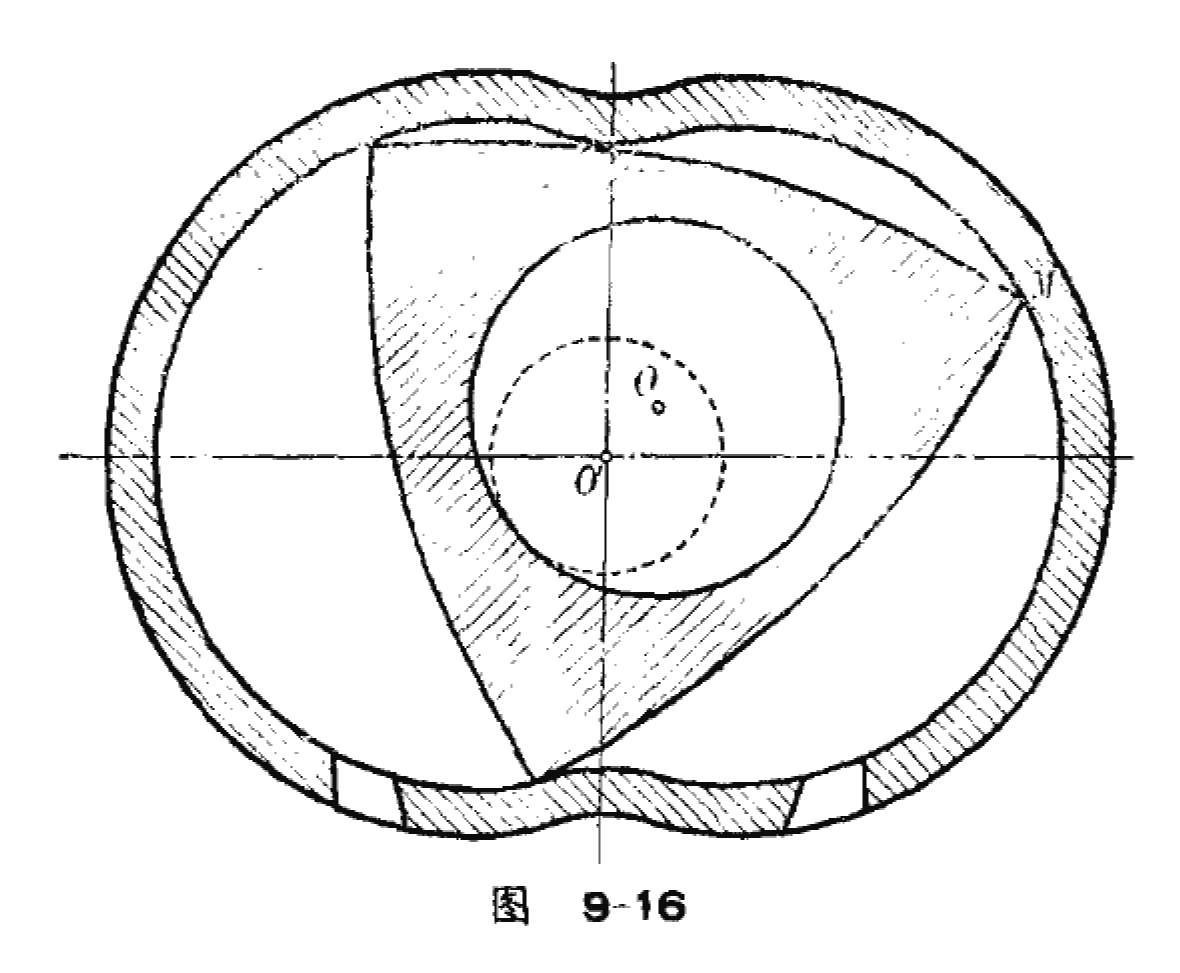


图 9-16

1. 缸体的理论型线

先分析活塞在缸体内的运动情况.

在这个旋转式发动机中，活塞固定在一个大齿轮上，活塞的中心 O 就是大齿轮的中心. 在燃料爆发力对活塞的作用下，这个大齿轮（是个内齿轮）绕着另一个位置固定的小齿轮（是个外齿轮）作啮合运动（相当于一个大圆绕着与它内切的固定小圆滚动），而小齿轮的中心 O' 就是缸体型线的中心. 活塞顶点 M 的运动轨迹在设计中被取作理论型线.

通过以上分析可知，缸体的理论型线，可看作当一个大圆沿着与它内切的固定小圆滚动时，与大圆一起滚动的某一点 M 的轨迹.

下面，就从轨迹出发，推导缸体理论型线的方程.

设大圆的圆心为 O，半径为 R；小圆的圆心为 O'，半径为 r，动点 M 到 O 的距离记为 $OM=l$（动点 M 随大圆一道运动）.

取固定圆的中心 O' 为坐标原点，如图 9-17 建立坐标系. 图中大圆上的点 A 与 O、M 在同一直线上，设在开始时刻两

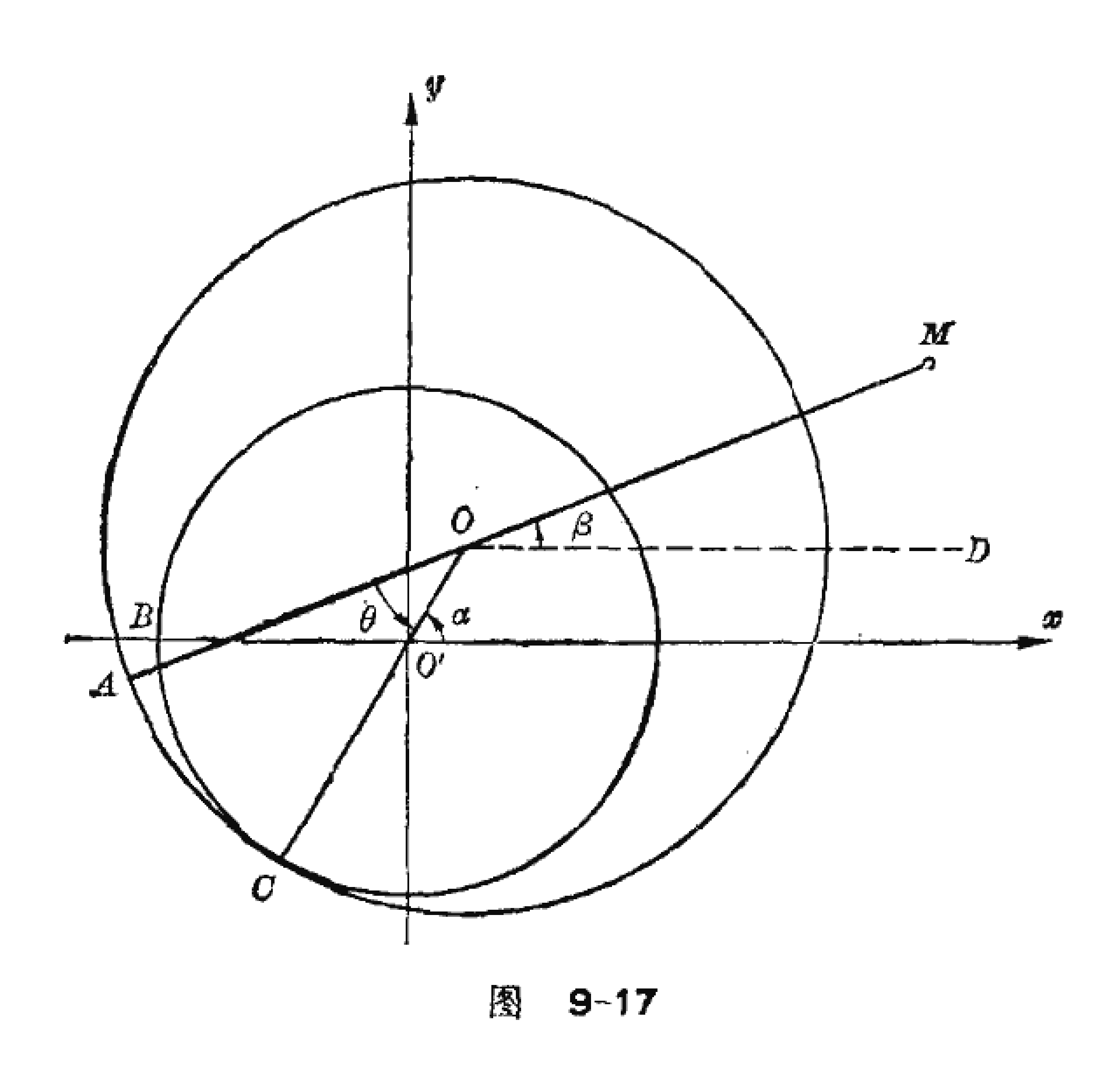


图 9-17

圆的切点在大圆上是 A、小圆上是 B, B 点在 x 轴上.

当大圆沿小圆滚动时，两圆连心线 OO' 也随着转动，记线段 OO' 的倾角为 α, 我们取 α 为参数.

当 OO' 转动角度 α 时，两圆切点在大圆上从 A 移到 C, 小圆上从 B 移到 C, 所以

$$\widehat{AC}=\widehat{BC}.$$

于是，若记 OA 到 OC 的交角为 θ, 则

$$R\theta=r\alpha,$$

即

$$\theta=\frac{r}{R}\alpha.$$

从图 9-17 可见，若 M 点坐标为 (x, y), 则

$$x=OO'\cos\alpha+OM\cos\beta,$$
$$y=OO'\sin\alpha+OM\sin\beta,$$

其中 β 是直线 AM 的倾角. 因 AM 为一直线，所以

$$\beta=\pi-\theta-\angle COD=\pi-\theta-(\pi-\alpha)$$
$$=\alpha-\theta=\alpha-\frac{r}{R}\alpha=\frac{R-r}{R}\alpha.$$

于是，缸体的理论型线的方程是

$$x=(R-r)\cos\alpha+l\cos\left(\frac{R-r}{R}\alpha\right),$$
$$y=(R-r)\sin\alpha+l\sin\left(\frac{R-r}{R}\alpha\right).$$

例如，在实际设计中取 $R:r=3:2$，即取

$$R=3e,\quad r=2e,$$

则由

$$R-r=e,\quad \frac{R-r}{R}=\frac{1}{3},$$

得缸体的理论型线方程为

$$x=e\cos\alpha+l\cos\frac{\alpha}{3},$$
$$y=e\sin\alpha+l\sin\frac{\alpha}{3}.$$

2. 缸体的实际型线

在缸体的实际设计中，为了减少磨损，三角活塞与缸壁接触的顶端 M 不是一个尖点，而是一个半径为 a 的小圆弧．因此，活塞与缸壁的接触点 N 是小圆弧上的一点(图 9-18)，这个点可看作由 M 点沿理论型线的法线方向(即与切线垂直的方向)向外平移一段距离 a 所得．N 点的轨迹就是缸体的实际型线．

大圆绕固定小圆作纯滚动时，两圆的切点位置 C 不断改变．在运动的每一瞬间，随大圆运动的点 M 可看作是绕切点 C 转动，即理论型线在 M 点附近可看作是以 C 点为圆心、CM 为半径的圆弧，因此 CN 就是理论型线的法线．

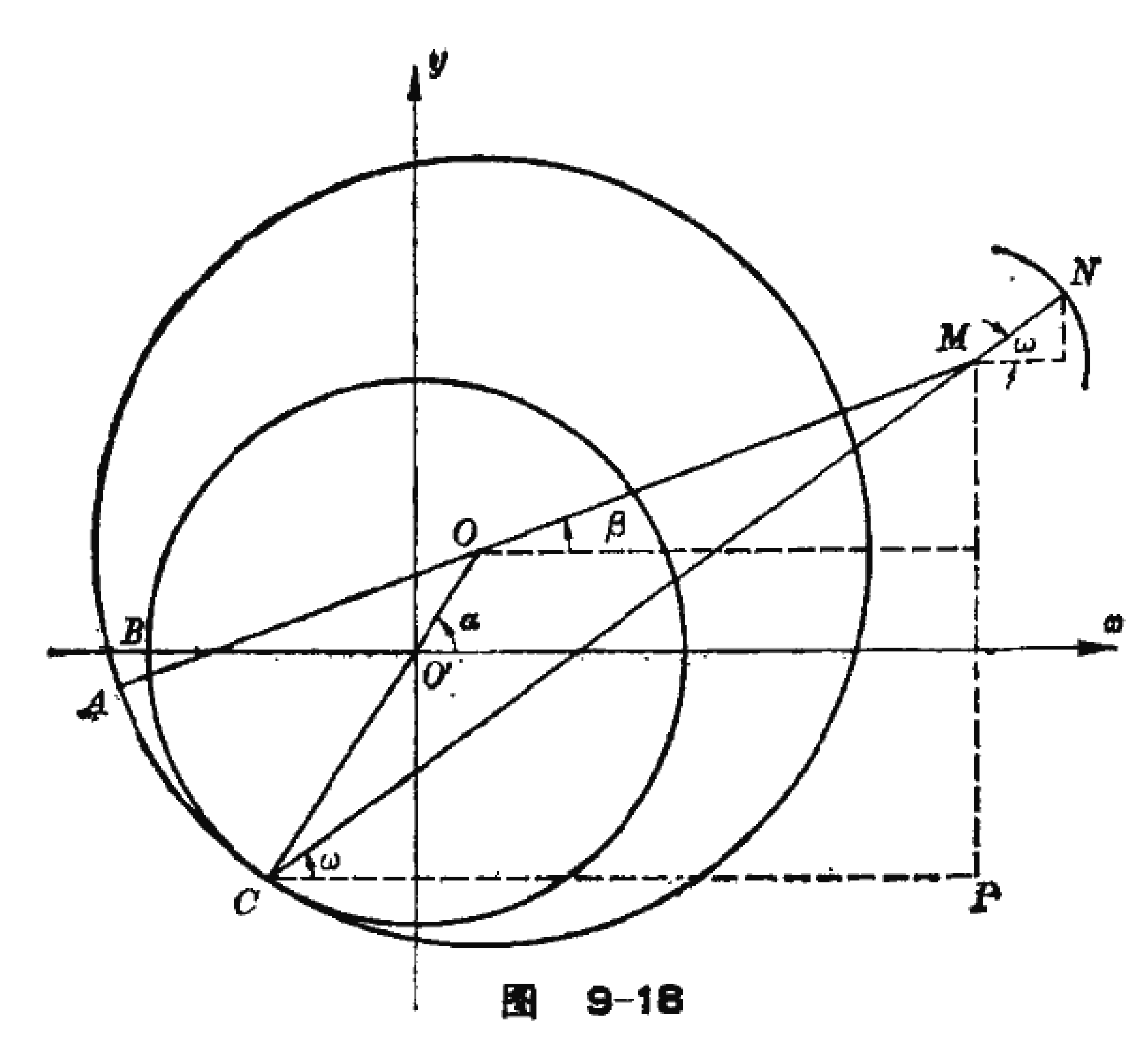


图 9-18

设点 N 的坐标为 (x', y')，由图 9-18 可见，

$$x' = x + a\cos\omega, \quad y' = y + a\sin\omega,$$

其中 ω 是直线 CN 的倾角．又从图 9-18 有

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{MP}{CP} = \frac{CO\sin\alpha + OM\sin\beta}{CO\cos\alpha + OM\cos\beta}$$

$$= \frac{R\sin\alpha + l\sin\beta}{R\cos\alpha + l\cos\beta} = \frac{3e\sin\alpha + l\sin\dfrac{\alpha}{3}}{3e\cos\alpha + l\cos\dfrac{\alpha}{3}},$$

于是，运用三角公式得

$$\cos\omega = \frac{3e\cos\alpha + l\cos\dfrac{\alpha}{3}}{\sqrt{l^2 + 9e^2 + 6le\cos\dfrac{2\alpha}{3}}},$$

$$\sin\omega = \frac{3e\sin\alpha + l\sin\dfrac{\alpha}{3}}{\sqrt{l^2 + 9e^2 + 6le\cos\dfrac{2\alpha}{3}}}.$$

所以，缸体的实际型线的方程是

$$x'=e\cos\alpha+l\cos\frac{\alpha}{3}+\frac{a\left(3e\cos\alpha+l\cos\frac{\alpha}{3}\right)}{\sqrt{l^2+9e^2+6le\cos\frac{2\alpha}{3}}},$$

$$y'=e\sin\alpha+l\sin\frac{\alpha}{3}+\frac{a\left(3e\sin\alpha+l\sin\frac{\alpha}{3}\right)}{\sqrt{l^2+9e^2+6le\cos\frac{2\alpha}{3}}}.$$

五、圆 弧 凸 轮

在某些型号的柴油机中，采用了图 9-19 所示的凸轮机构，其中凸轮 U 由几段圆弧光滑连接而成，通过 U 的转动，平面挺柱 V（底面是个平面）作上下往复运动.

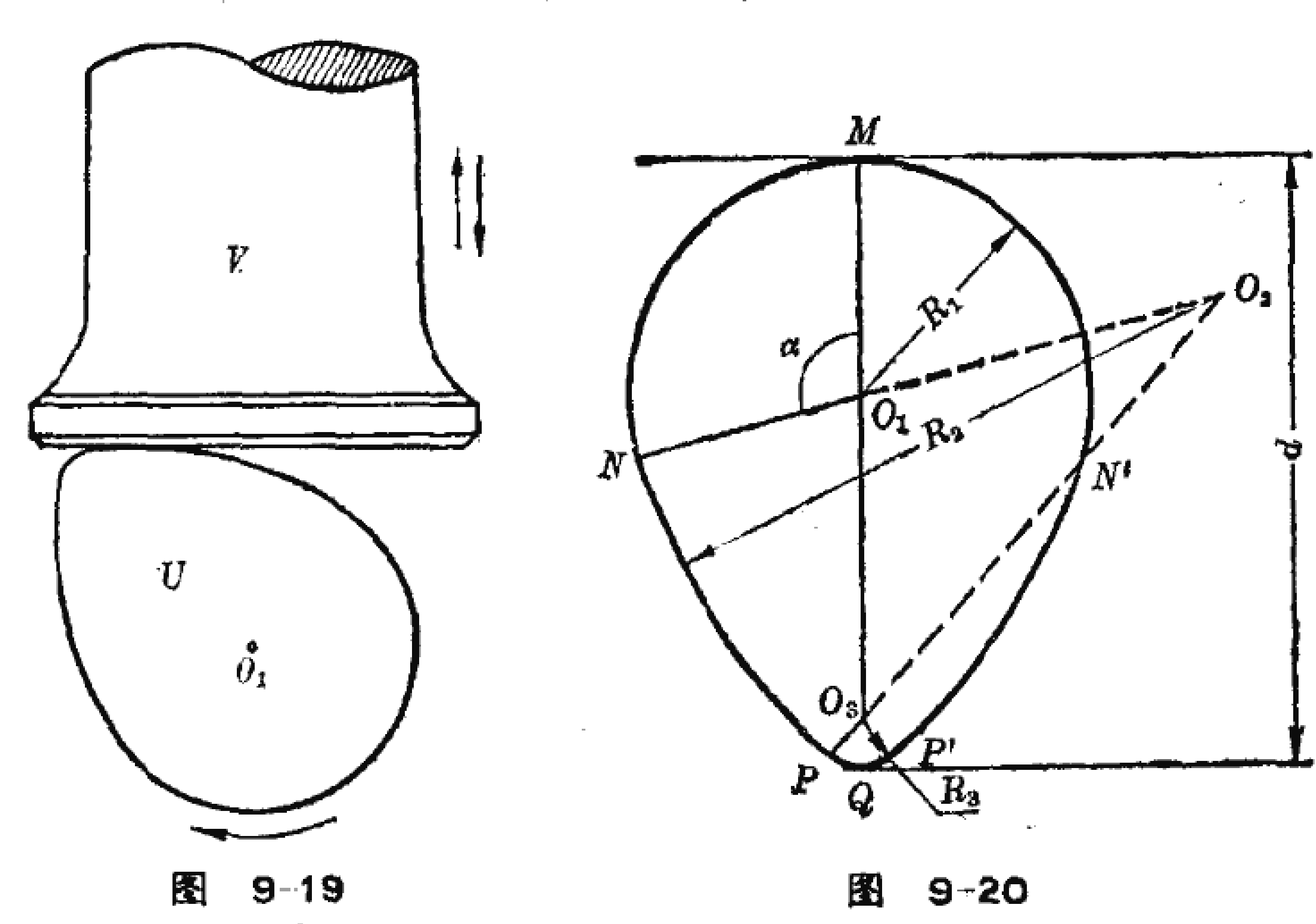


图 9-19　　　　图 9-20

设圆弧凸轮的形状如图 9-20 所示，O_1 是凸轮的中心，四段圆弧光滑连接组成凸轮的型线，型线关于直线 MQ 对称，P、N 和它们关于 QM 的对称点 P'、N' 是圆弧的连接点.

圆弧凸轮U有五个几何参数：R_1、R_2、R_3、α、d. 凸轮外形光滑连接的条件表现为：N、O_1、O_2应在一直线上，P、O_3、O_2也在一直线上. 在$\triangle O_1O_2O_3$中应用余弦定理得

$$O_2O_3^2=O_1O_2^2+O_1O_3^2-2O_1O_2\cdot O_1O_3\cos\angle O_2O_1O_3,$$

即

$$(R_2-R_3)^2=(R_2-R_1)^2+(d-R_1-R_3)^2 \\ -2(R_2-R_1)(d-R_1-R_3)\cos\alpha.$$

所以，五个参数中只有四个可以预先选择，另外一个必须从上式算出. 在一般情况下，R_1、d、α在凸轮设计前就决定了.

设凸轮按顺时针方向旋转，并设初始时刻挺柱底L与凸轮型线的接触点为M. 在凸轮转动过程中，射线O_1M绕O_1点按顺时针方向旋转，设转过角度θ后(图9-21)，O_1与L的距离是s，那末，研究挺柱的运动规律，就是要寻找s与θ之间的关系.

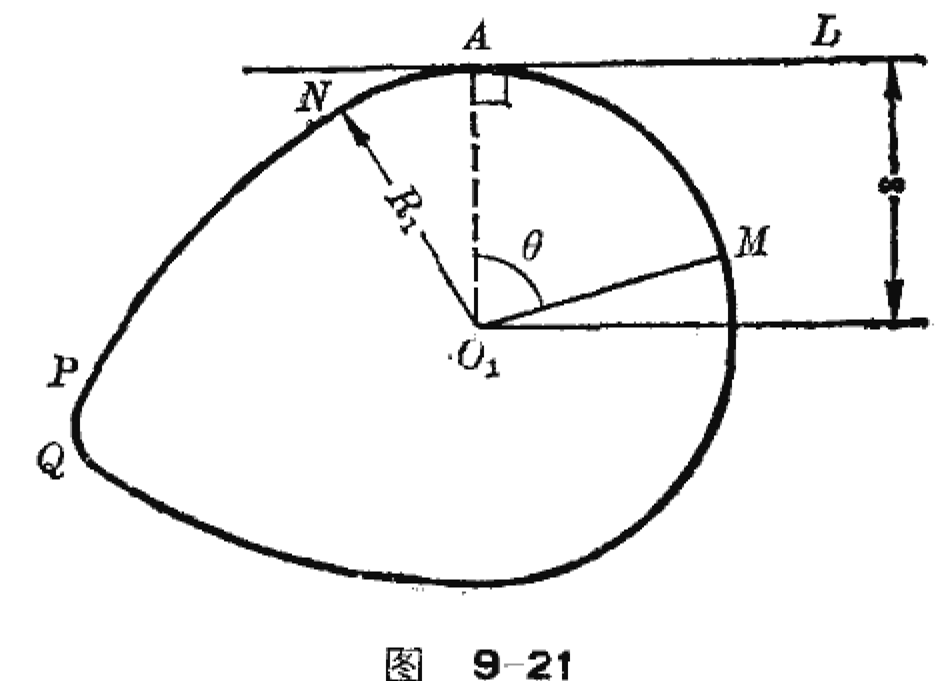


图 9-21

由于凸轮型线关于直线MQ对称，我们先就接触点A分别落在$\widehat{MN}$、$\widehat{NP}$、$\widehat{PQ}$这三段圆弧上的情形，导出s与θ之间的关系式.

(1) 接触点A在圆弧$\widehat{MN}$上.

这时转角θ满足$0\leqslant\theta\leqslant\alpha$.

如图9-21，因为L与圆弧相切于点A，所以O_1A与L垂直，于是

$$s=O_1A=R_1.$$

(2) 接触点 A 在圆弧 $\widehat{NP}$ 上.

这时转角 θ 满足 $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$，其中 β 是接触点 A 与 P 点重合时的转角(图 9-23)，它的值留到后面再确定.

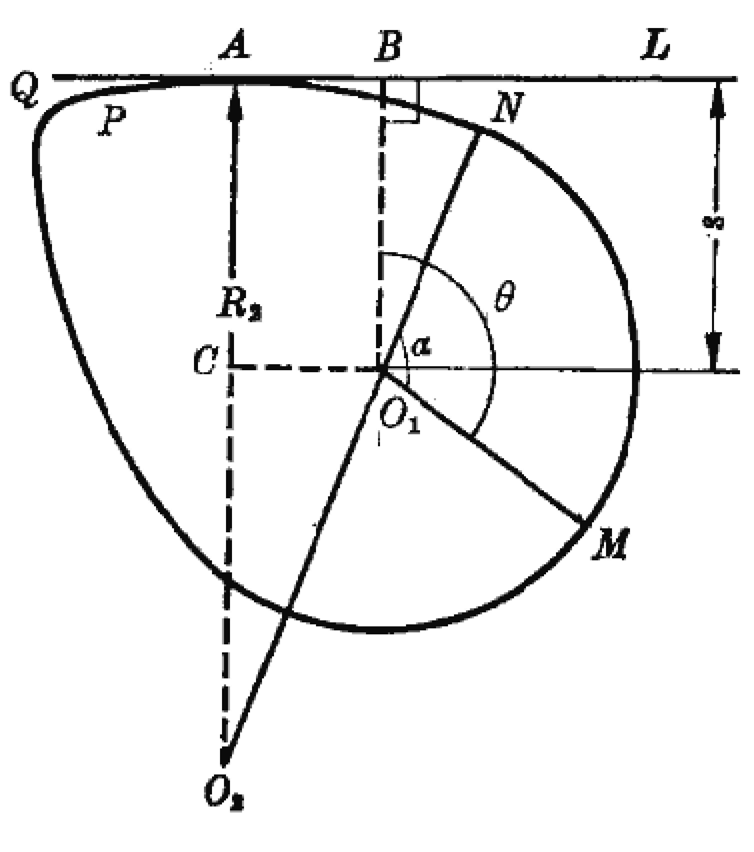


图 9-22

如图 9-22，因为 L 与圆弧 $\widehat{NP}$ 相切于点 A，所以 L 与 O_2A 垂直，又因为 N 是两段圆弧 $\widehat{MN}$ 与 $\widehat{NP}$ 的连接点，所以 O_2、O_1 与 N 在一直线上. 过 O_1 作 $O_1B \perp L$，B 为垂足，作 $O_1C \perp O_2A$，C 为垂足，则

$$s = O_1B = O_2A - O_2C = O_2A - O_1O_2 \cos \angle NO_2A,$$

而

$$O_2A = R_2, \quad \angle NO_2A = \angle NO_1B = \theta - \alpha,$$
$$O_1O_2 = R_2 - R_1,$$

所以

$$s = R_2 - (R_2 - R_1)\cos(\theta - \alpha).$$

为决定 β 的值，考虑图 9-23 中的 $\triangle O_1O_2O_3$. 因为这时接触点 A 与 P 点重合，而 O_2、O_3 与 P 在一直线上，所以

$$\angle O_1O_3O_2 = \pi - \beta,$$

又

$$\angle O_2O_1O_3 = \alpha,$$
$$O_1O_2 = R_2 - R_1,$$
$$O_2O_3 = R_2 - R_3,$$

在 $\triangle O_1O_2O_3$ 中应用正弦定理

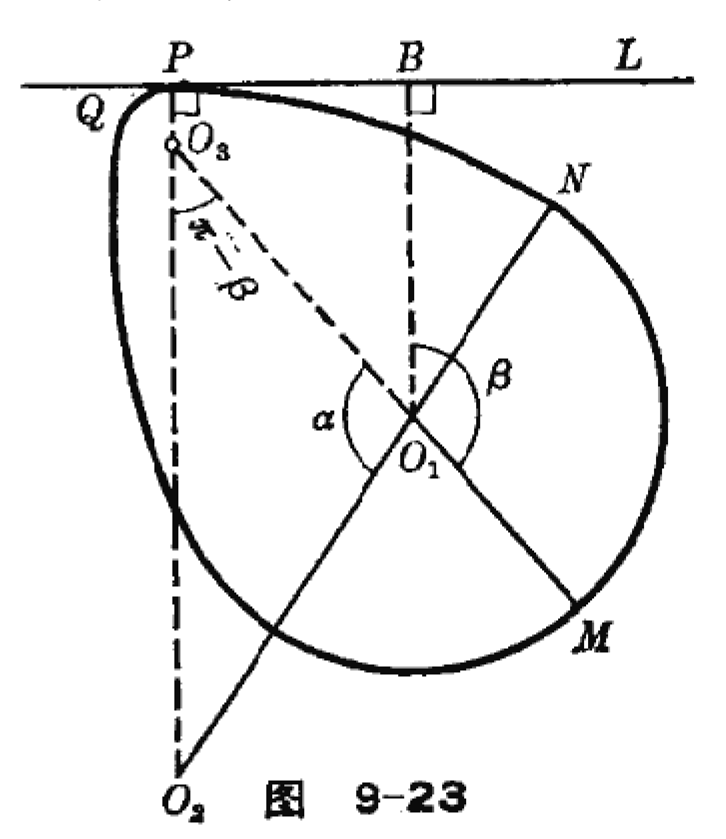


图 9-23

得

$$\frac{\sin\beta}{R_2-R_1}=\frac{\sin\alpha}{R_2-R_3},$$

由此可以决定β的值.

(3) 接触点A在圆弧$\overset{\frown}{PQ}$上.

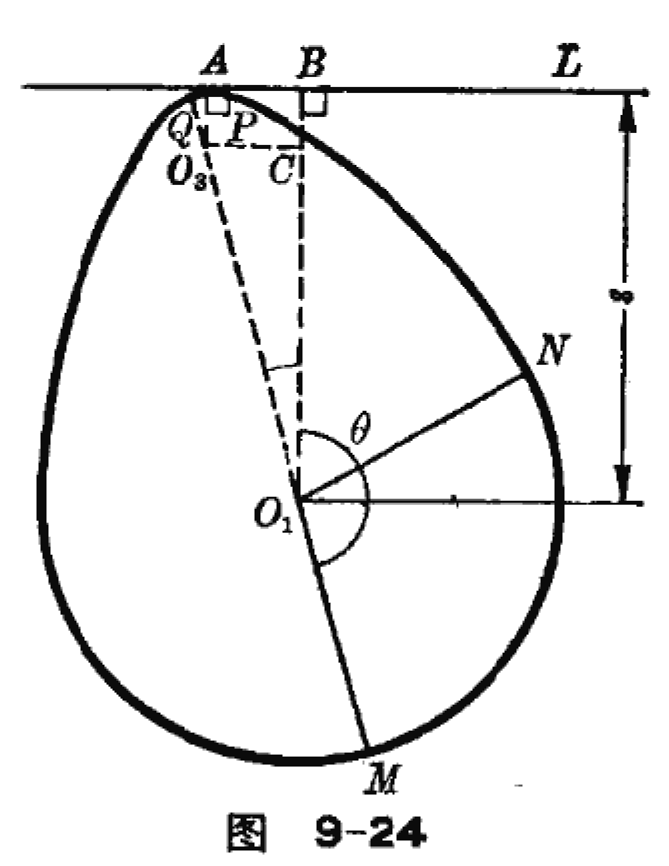


图 9-24

显然，转角θ满足$\beta\leqslant\theta\leqslant\pi$.

如图9-24，因为L与圆弧$\overset{\frown}{PQ}$相切于点A，所以L与O_3A垂直，过O_1作L的垂线，垂足为B，过O_3作O_1B的垂线，垂足为C，则

$$\angle CO_1O_3=\pi-\theta.$$

于是

$$\begin{aligned}s&=O_1B=O_3A+O_1C=O_3A+O_1O_3\cos\angle CO_1O_3\\&=R_3+(d-R_1-R_3)\cos(\pi-\theta)\\&=R_3-(d-R_1-R_3)\cos\theta.\end{aligned}$$

综上所述，当接触点A在曲线段$\overset{\frown}{MNPQ}$上时，转角θ满足$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$s$与$\theta$的关系为

$$s=\begin{cases}R_1, & 0\leqslant\theta\leqslant\alpha,\\ R_2-(R_2-R_1)\cos(\theta-\alpha), & \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\\ R_3-(d-R_1-R_3)\cos\theta, & \beta\leqslant\theta\leqslant\pi.\end{cases}$$

当接触点A在曲线段$\overset{\frown}{QP'N'M}$上时，转角θ满足$\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi$，由图9-25易见，转角为$\theta$时的$s$值恰等于转角为$2\pi-\theta$时的$s$值，而后者恰是上面已讨论过的情形，于是

当$\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi-\beta$时，$\beta\leqslant2\pi-\theta\leqslant\pi$,

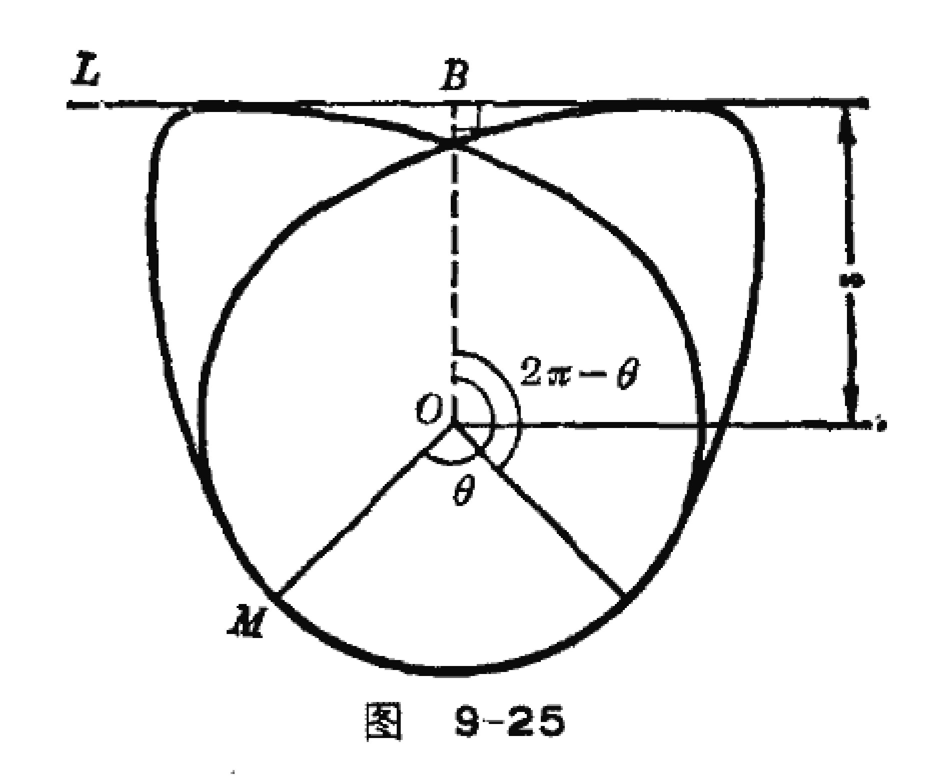


图 9-25

$$s=R_3-(d-R_1-R_3)\cos(2\pi-\theta)$$
$$=R_3-(d-R_1-R_3)\cos\theta;$$

当 $2\pi-\beta\leqslant\theta\leqslant2\pi-\alpha$ 时，$\alpha\leqslant2\pi-\theta\leqslant\beta$,

$$s=R_2-(R_2-R_1)\cos(2\pi-\theta-\alpha)$$
$$=R_2-(R_2-R_1)\cos(\theta+\alpha);$$

当 $2\pi-\alpha\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 时，$0\leqslant2\pi-\theta\leqslant\alpha$,

$$s=R_1.$$

这样，我们得到转角 θ 与距离 s 的关系为

$$s=\begin{cases}R_1, & 0\leqslant\theta\leqslant\alpha,\\ R_2-(R_2-R_1)\cos(\theta-\alpha), & \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\\ R_3-(d-R_1-R_3)\cos\theta, & \beta\leqslant\theta\leqslant2\pi-\beta,\\ R_2-(R_2-R_1)\cos(\theta+\alpha), & 2\pi-\beta\leqslant\theta\leqslant2\pi-\alpha,\\ R_1, & 2\pi-\alpha\leqslant\theta\leqslant2\pi,\end{cases}$$

其中 β 由下式决定：

$$\sin\beta=\frac{R_2-R_1}{R_2-R_3}\cdot\sin\alpha.$$

六、简单的线性规划问题

在生产实践中，我们经常遇到以下两类问题：

1. 如何合理安排,用最少量的人力、物力资源,完成既定的任务;

2. 如何运用现有人力、物力资源,完成最大量的任务.

下面,我们仅就第一类问题讨论两个简单例子及其解法.

[例 1] 甲和乙两地生产某种产品,它们可调出的产品数量各为 300 吨和 750 吨,A、B、C 三地需要这种产品的数量分别为 200 吨、450 吨和 400 吨. 由于地区之间的距离、运输条件不同,运费各有高低,现将这些地区的调出调进数量和它们之间的运费列表如下:

运费(元/吨) 调进地区 / 调出地区	A	B	C	调出数量(吨)
甲	6	3	5	300
乙	5	9	6	750
调进数量(吨)	200	450	400	

问应取怎样的调运方案,才能使总的运费最省?

这是上述第一类问题.

为制订最好的调运方案,我们先把这个问题"翻译"成数学语言,用数学式子来描写它.

设由甲地调到 A、B 两地该产品的数量分别为 x, y (吨),因为甲地调出的总数为 300,所以甲地调到 C 地的数量为 $300-(x+y)$. A 地须调进该产品的总数为 200,现已由甲地调进 x,所以由乙地调到 A 地的数量为 $200-x$,同样,由乙地调到 B、C 两地的数量分别为 $450-y$ 和 $400-(300-x-y)=100+x+y$.

根据上表，总的运费为

$$\begin{aligned}f&=6x+3y+5(300-x-y)+5(200-x)\\&\quad+9(450-y)+6(100+x+y)\\&=2x-5y+7150.\end{aligned}$$

因为调运的吨数总是非负的，所以 x, y 必须满足下列条件：

$$x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad 300-(x+y)\geqslant 0,\quad 200-x\geqslant 0,$$
$$450-y\geqslant 0,\quad 100+x+y\geqslant 0.$$

如果 $x+y\leqslant 300$, $x\geqslant 0$ 成立，必有 $y\leqslant 450$；如果 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ 成立，必有 $100+x+y\geqslant 0$，所以上述不等式中实际上只有前四个是独立的. 因此，我们的问题用数学来描述就是：在条件

$$\begin{cases}x+y\leqslant 300,\\x\leqslant 200,\\x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\end{cases}$$

下，求 x, y 的值，使总运费

$$f=2x-5y+7150$$

最小.

[例 2]　某工厂生产 A、B 两种产品一批，产量分别为 45 个和 55 个；所用的原材料为甲、乙两种规格的某种金属板，每张面积分别为 2 平方米和 3 平方米. 用甲种规格的金属板可制成 A 种产品 3 个和 B 种产品 5 个，用乙种规格的金属板可制成 A、B 两种产品各 6 个.

原料＼产品	A	B	原料面积
甲	3	5	2
乙	6	6	3
产量数	45	55	

问甲、乙两种规格的金属板各应取多少张，才能完成生产计划并使总的用料面积最省？

设甲、乙两种规格的金属板各取 x 张和 y 张，则可制成 A 种产品的数量为 $3x+6y$，B 种产品的数量为 $5x+6y$，用料面积为 $2x+3y$（米²），因此问题就成为：在条件

$$\begin{cases}3x+6y\geqslant 45,\\5x+6y\geqslant 55,\\x\geqslant 0,\ \ y\geqslant 0\end{cases}$$

下，求 x, y 的值，使用料面积

$$f=2x+3y$$

最小.

上面两个问题虽然具体内容不同，但其数学形式却是一样的，即在条件

$$\left.\begin{array}{c}a_1x+b_1y\leqslant c_1,\\a_2x+b_2y\leqslant c_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_nx+b_ny\leqslant c_n,\\x\geqslant 0,\ \ y\geqslant 0\end{array}\right\}\qquad(1)$$

下，求 x, y 的值，使函数

$$f=px+qy+r\qquad(2)$$

取最大值或最小值.

这样的问题称为线性规划问题，它在国民经济各部门中有不少应用，如物资的运输与供应，生产任务的安排，套裁落料等. 不等式组(1)称为约束条件，式(2)称为目标函数. 在一般线性规划问题中，变量不止两个，可以是十几个，甚至更多.

对于线性规划问题，数学上是有一般的求解方法的，但这

牵涉到较多的数学知识，这里就不讲了，对这方面有兴趣的读者可参阅有关的书籍．下面我们利用图形和坐标法，借助几何直观，解决例1和例2中的问题．

［例1］ 在约束条件

$$\begin{cases} x+y\leqslant 300, \\ x\leqslant 200, \\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

下，求 x, y 的值，使目标函数

$$f=2x-5y+7150$$

取最小值．

解：将约束条件中不等式的不等号换成等号，得到一次方程

$$x+y=300$$

和

$$x=200.$$

在平面直角坐标系中画出它们的图形——直线．由于 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, 所求的点 (x, y) 必在第Ⅰ象限中；根据约束条件 $x+y\leqslant 300$, 这点必位于直线 $x+y=300$ 的左下方，同理它必在直线 $x=200$ 的左方．因此所求的点 (x, y) 必定落在四边形 $OABC$ 中(图 9-26)．

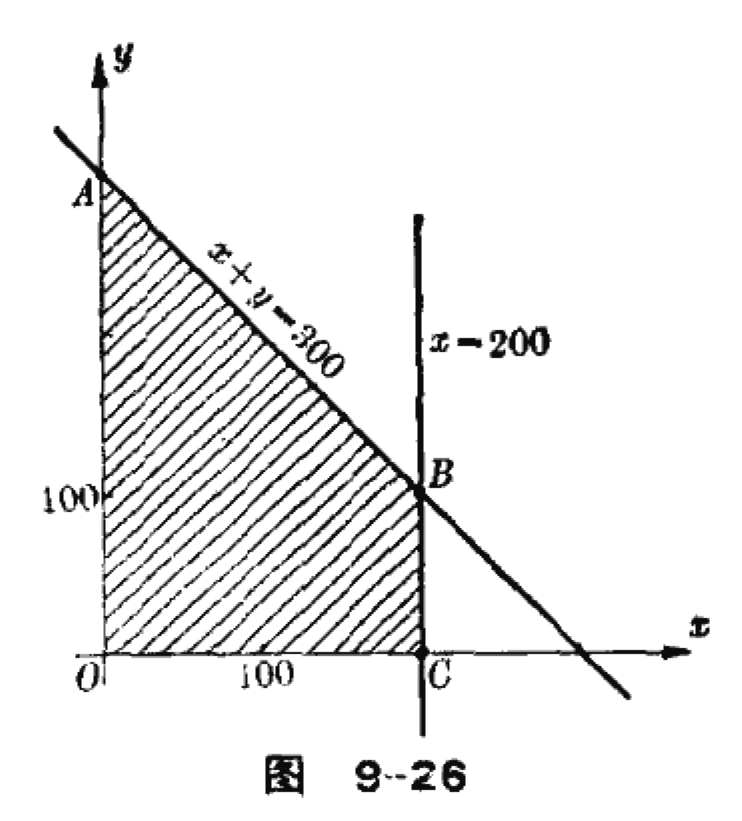


图 9-26

因为目标函数

$$f=2x-5y+7150$$

关于 x, y 是一次的，因此目标函数取同一值的点的轨迹是一条直线，例如 $f=1000$ 时，得到直线

$$2x-5y+6150=0,$$

随着目标函数 f 所取值的变化，得到一族平行的直线

$$2x-5y+7150-f=0$$

(图 9-27). f 越小，直线的纵截距

$$\frac{1}{5}(7150-f)$$

越大；反之，纵截距越大，目标函数所取的值 f 就越小. 因此我们的问题就成为：在四边形 $OABC$ 中找一点，使得上述平行直线族中通过该点的直线具有最大的纵截距. 从图 9-28 中易见，点 A 正是所要找的，它的坐标为 $(0, 300)$，即所求的解为

$$x=0, \quad y=300.$$

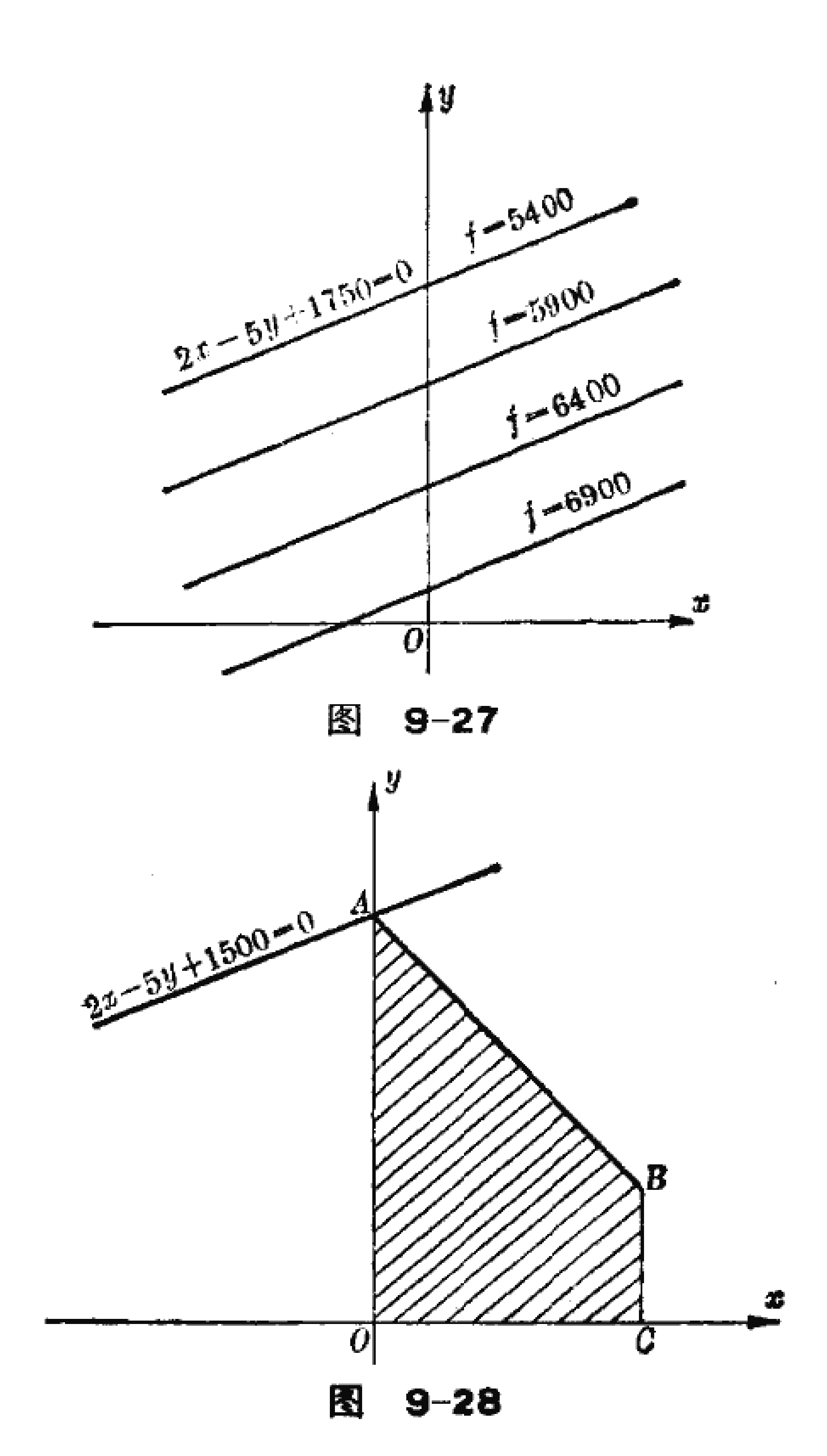


图 9-27

图 9-28

回到原来的运输问题，我们得到下面的调运方案：

数量(吨) 调进地区 / 调出地区	A	B	C
甲	0	300	0
乙	200	150	400

总的运费为

$$f=7150-5\times300=5650\ (元).$$

［例 2］ 在约束条件

$$\begin{cases}3x+6y\geqslant45,\\5x+6y\geqslant55,\\x\geqslant0,\ \ y\geqslant0\end{cases}$$

下，求 x, y 的值，使目标函数

$$f=2x+3y$$

取最小值.

解：在平面直角坐标系中，作直线

l_1: $$3x+6y=45$$

和

l_2: $$5x+6y=55,$$

与例 1 同样讨论可知，满足约束条件的点必在所作两直线右上方的公共部分中，即图 9-29 中斜线所示的区域中.

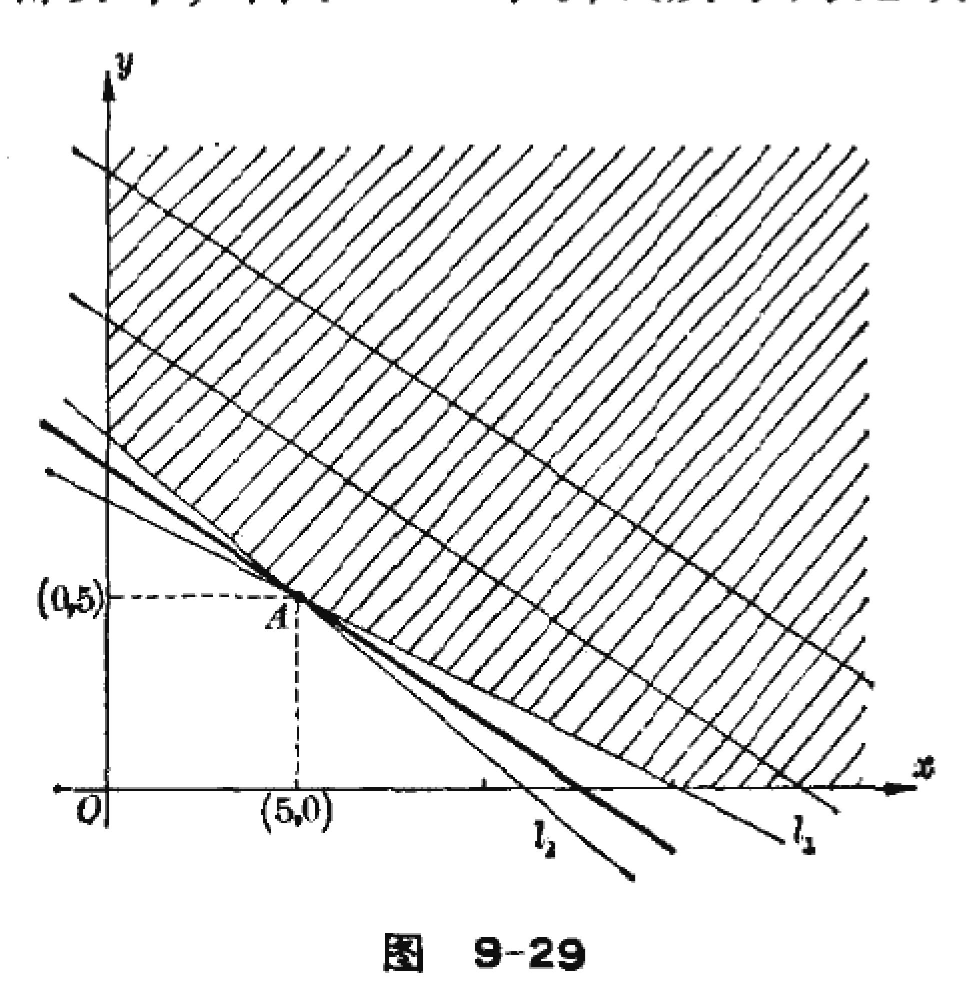


图 9-29

考虑平行直线族

$$2x+3y-f=0\quad(f\ 作为常数),$$

显然，对于纵截距 $\frac{f}{3}$ 越小的直线，目标函数 f 取值越小．因此，问题就是：在阴影线所示区域中找一点，使得上述平行直线族中过该点的直线纵截距最小．由于族中直线的斜率 $k=-\frac{2}{3}$ 介于 l_1 和 l_2 的斜率 $k_1=-\frac{1}{2}$、$k_2=-\frac{5}{6}$ 之间，从图 9-29 易见，l_1 和 l_2 的交点 A 正是要找的点，所求的解即为 A 点的坐标．解方程组

$$\begin{cases} 3x+6y=45, \\ 5x+6y=55, \end{cases}$$

得

$$x=y=5.$$

回到原来的问题，即甲、乙两种规格的金属板各应取 5 张，这时的用料面积为

$$f=2\times5+3\times5=25 \text{（米}^2\text{）}.$$

七、优 选 法

“优选法”是以较少的试验次数，迅速找到生产上合适的配方、合适的工艺操作条件和制作过程的一种方法．它的推广应用，受到各地工农兵群众的欢迎．

举例来说，炼钢时要加碳，加得太多则成为生铁，太少了又变成熟铁．那末，每吨钢中要加多少碳，才能使它成为质量合格的钢呢？这就是一个优选法问题．要解决这个问题，就要做试验．譬如根据经验，每吨钢中碳的最佳含量在 1000 克到 2000 克之间，如果我们第一次每吨加碳 1001 克，第二次 1002 克，……，这样要做一千次才能比较出最佳含量（常称为“好点”）．如果采用优选法，就可以大大减少试验次数，经过十多次试验就可找到好点．

1. 单因素优选法

我们从研究函数的角度来看刚才提出的问题．每吨钢中的含碳量 x 和钢的强度 y 之间存在着函数关系，问题是在事先不知道函数关系的情况下，要通过次数尽可能少的试验，找出使 y 达到最大值的 x．在这个问题中，钢的强度只取决于一个因素——碳的含量，这类问题称为单因素的优选问题．

一般，单因素优选问题中要找的好点，就是自变量范围中的点 a（图 9-30），它使函数值达到最大（或最小）．

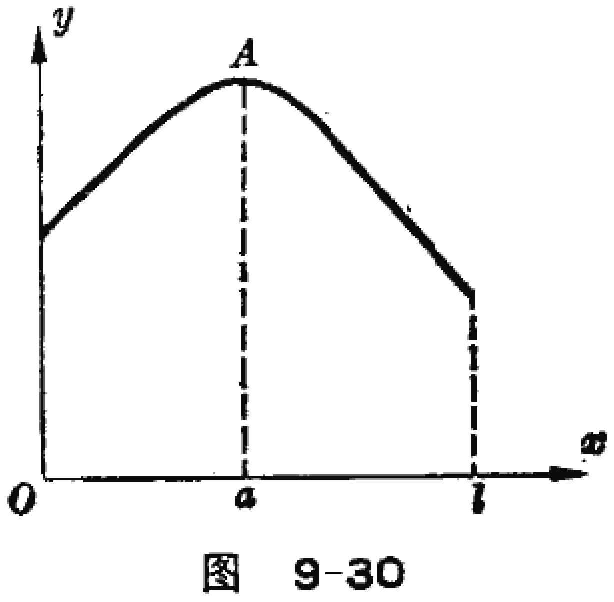


图 9-30

最常见的函数图形是单峰的，即如图 9-30 所示，起初 y 随 x 的增大而增大，到达曲线上的最高点 A 后，y 反而随 x 的增大而减少．单峰函数有这样的特点：

设 x_1、x_2 是自变量范围内任意两点，$x_1<x_2$，则：

(1) 若 x_1 点的试验结果比 x_2 点好，即图 9-31 中 $y_1>y_2$，则好点 a 必落在 $[0, x_2]$ 中，因而下次试验时可不考虑 $[x_2, l]$ 中的点；

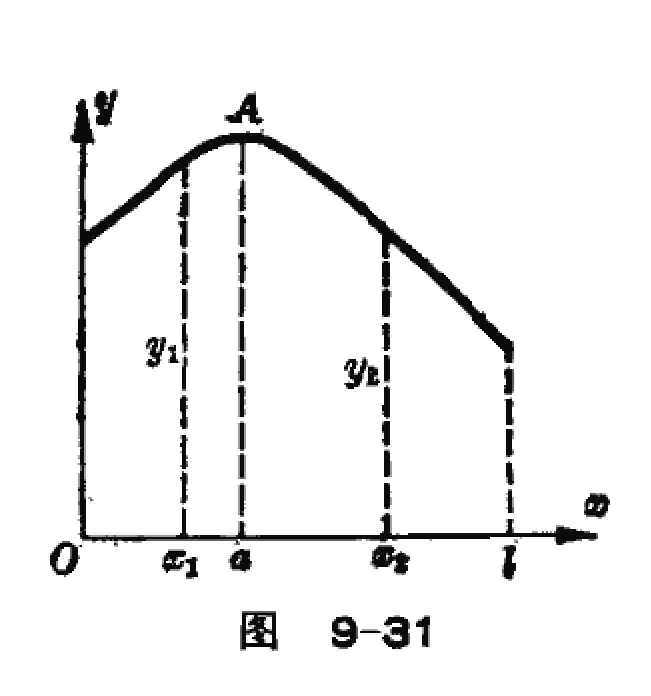


图 9-31

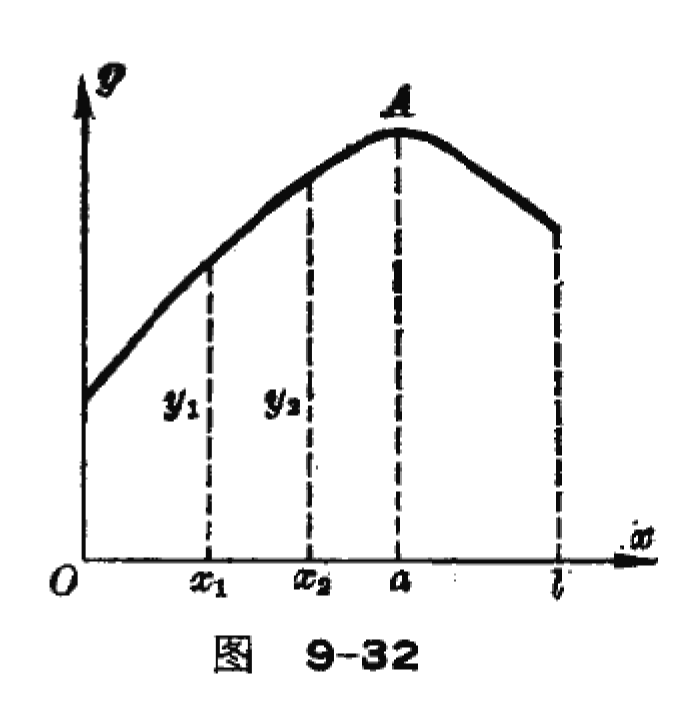


图 9-32

(2) 若 x_1 点的试验结果比 x_2 点差，即图 9-32 中 $y_1<y_2$，

则好点 a 必落在 $[x_1, l]$ 中，因而下次试验时可不考虑 $[0, x_1]$ 中的点.

根据这个特点，便可提出单因素问题的优选方法.

(1) 0.618 法

从单峰函数的特点可知，只要比较两次试验，就可缩小试验的范围，问题是如何选择试验点.

例如，设试验范围为[0, 1]，对于首次比较的两个试验点 x_1 和 $x_2(x_1<x_2)$，由于无法预料试验结果，即无法预料试验后将扔去区间 $[0, x_1]$ 还是 $[x_2, l]$，因此，合理的想法是使 $[0, x_1]$ 和 $[x_2, 1]$ 这两个区间等长. 为方便起见，记 $x_2=x$，则 $x_1=1-x$ (图 9-33).

图 9-33

经过头两次试验，扔掉了一个区间，譬如扔掉 $[x, 1]$，则留下来的区间为 $[0, x]$，其中已有一个试验过的点 $1-x$，它的试验结果可供下次比较. 如要求试验范围每次缩小的比例一样大，则点 $1-x$ 在 $[0, x]$ 中的地位应与 x 在 $[0, 1]$ 中的地位相当，即

$$\frac{1-x}{x}=\frac{x}{1},$$

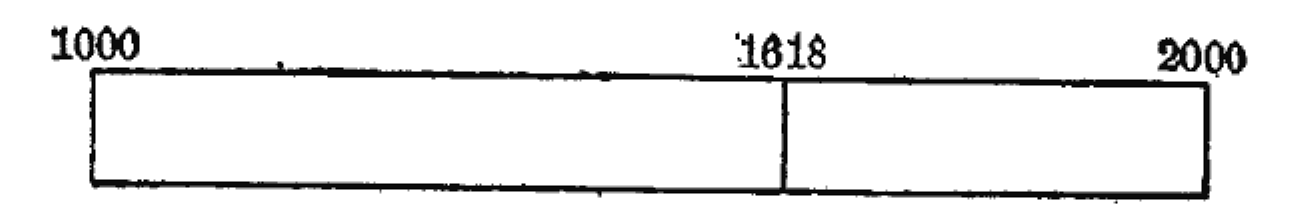
从中解得正根

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618.$$

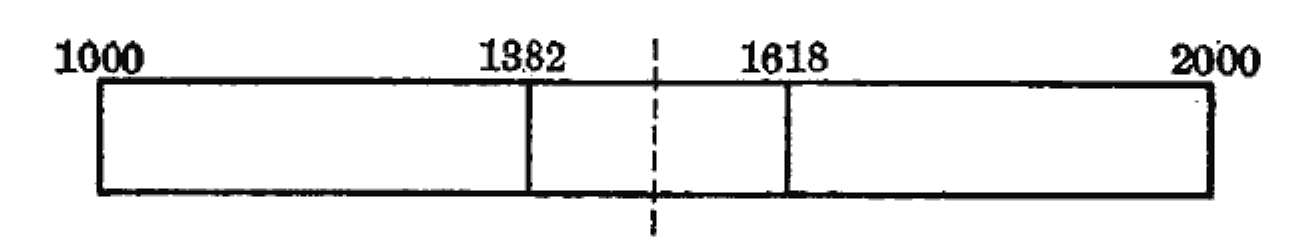
于是，首次的两个试验点应取 $x_2=0.618$ 以及它关于 $[0, 1]$ 中点的对称点 $x_1=1-x_2=0.382$，比较试验结果后扔掉一段区间，然后在留下区间内取一个新试点，该点与已试点关于区间中点对称. 与已试点比较试验结果后再扔掉一段区间，象这样一直做下去，每次缩短试验范围 38.2%，很快地便

会接近好点，这就是“0.618法”.

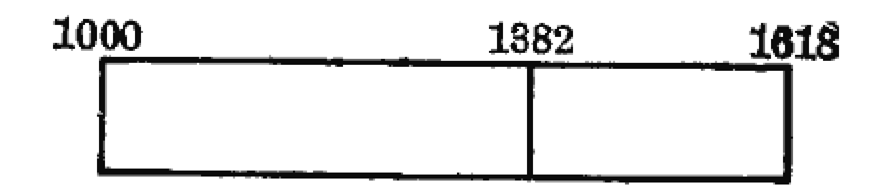
回到寻找每吨钢中碳的最佳含量一例. 因好点在1000克到2000克之间，我们可用一条有刻度的纸条表达1000克到2000克，在这纸条长度的0.618倍的地方划一条红线，在这条红线指示的刻度上做一次试验，也就是按1618克做一次试验.



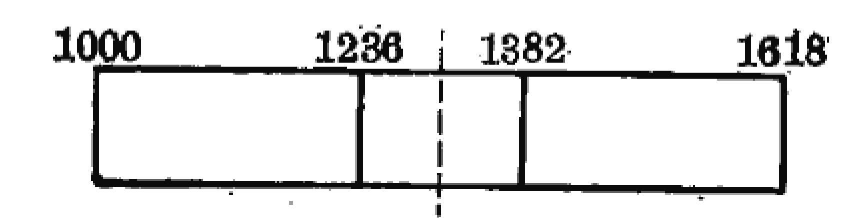
然后把纸条依中对折，前一红线落在另一层的地方再划一条红线，这条红线在1382克处，再按1382克做一次试验.



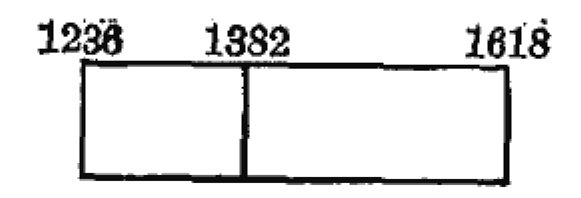
把两次试验结果进行比较，如果1382克处效果好些，就在1618克处把纸条的右边一段剪去，得



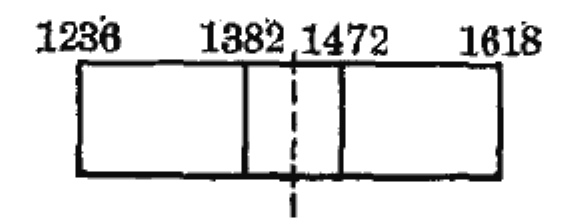
(如果1618克处效果较好，就剪去1382以左的一段). 再依中对折，又可划出一条红线在1236克处：



按1236克做试验，再和1382克处的效果比较，如果仍然是1382克处好，则在1236克处剪去左边的一段，得



再依中对折，找出一个试验点 1472：



按 1472 克做试验，然后比较效果后再剪去一段.

就这样，继续试验、比较、再试验、再比较，试验点便越来越接近好点，到达所求的精度时就可结束试验.

(2) 分数法

用 0.618 近似代替 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，得到了"0.618 法". 但有时用分数近似代替 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，使用起来更方便. 下面我们就谈一谈"分数法".

例如，为了配制一种不锈钢管的酸洗液 500 毫升，固定了其他条件，要确定硝酸的最佳用量. 根据经验，优选范围在 100 到 230 毫升，因此，由"0.618 法"知第一次试验应取硝酸用量为

$$100+(230-100)\times 0.618=180.34\ (\text{毫升}).$$

但实际操作中，没有必要也不可能计量得这么准确，只要在 110 毫升、120 毫升、……、210 毫升、220 毫升这十二个等级中比较出最佳用量即可. 于是，我们很自然地会在最靠近 180.34 毫升的 180 毫升处进行第一次试验. 而 180 与 100 的距离同整个试验范围长度之比为

$$\frac{180-100}{230-100}=\frac{80}{130}=\frac{8}{13},$$

所以,实际上是以分数 $\frac{8}{13}$ 近似代替 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

一般,试验范围可根据实际需要分成若干等分,而好点只须在这些分点上选择. 那末,如何根据分点数的多少,用适当的分数去代替 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 呢?

经过研究,人们找到 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的一串近似分数:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \cdots$$

其中后一分数的分子与前一分数的分母相等,而后一分数的分母是前一分数的分子与分母的和. 也就是说,这些分数是如下数列中相邻两数的商:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \cdots,$$

这个数列的第 1 项为 1, 第 2 项为 2, 以后每项是前两项之和.

记住这个数列后,就可以不用 0.618 法而直接从这个数列找到试验点. 以上述配制酸洗液为例,从 100 毫升到 230 毫升中以 10 毫升为一档共有 12 个分点,而上面数列中位于 12 之前的最大两个数是 8 和 5, 所以最初两次试验就在第 8 点(180 毫升)和第 5 点(150 毫升)处进行.

100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230
	1	2	3	4	(5)	6	7	(8)	9	10	11	12	

比较试验结果,如果 180 毫升好,则把 [100, 150] 一段抹掉,在[150, 230]上继续试验,它包含 7 个分点,重新编号为

150	160	170	180	190	200	210	220	230
	1	2	(3)	4	(5)	6	7	

在上述数列中,位于 7 之前最大的两个数是 5 和 3, 第

3 点(180 毫升)处已做过试验,就在第 5 点(200 毫升)再作一次试验,并比较试验结果以缩小范围. 就这样,一直继续到找出好点为止.

2. 双因素优选法

在生产斗争和科学实验中遇到的问题, 往往不只是一个因素. 例如上面提到的不锈钢管酸洗液, 实际上必须同时考虑氢氟酸和硝酸这两个因素,是一个双因素问题.

处理双因素问题,可以先固定一个因素,用单因素方法找出第二个因素的好点. 然后不断地从一个因素的好点出发,继续寻找另一因素的好点,直到达到要求为止.

在配制酸洗液的例子中,根据经验知道,硝酸的优选范围是 110 到 300 毫升, 氢氟酸的优选范围是 25 到 75 毫升. 我们可以先把氢氟酸固定在试验范围 [25, 75] 的 0.618 附近即 55 毫升处. 用单因素的优选法选出硝酸含量的好点 A_1 在 160 毫升处. 然后把硝酸含量固定在 160 毫升处, 用单因素优选法对氢氟酸含量进行优选, 找到好点 A_2 在 45 毫升处 (图 9-34). A_2 一定比 A_1 好, 可把图9-34中直线 l_1 的上面部分扔掉. 接着又在通过好点 A_2 的横线 l_3 上找到好点 A_3, A_3 又比 A_2 好, 又可将直线 l_2 的左边部分扔掉. 按此法继续做下去, 试验范围一次比一次缩小. 当试验达到一定精度要求或质量指标已满足预定要求时, 试验便可告一段落.

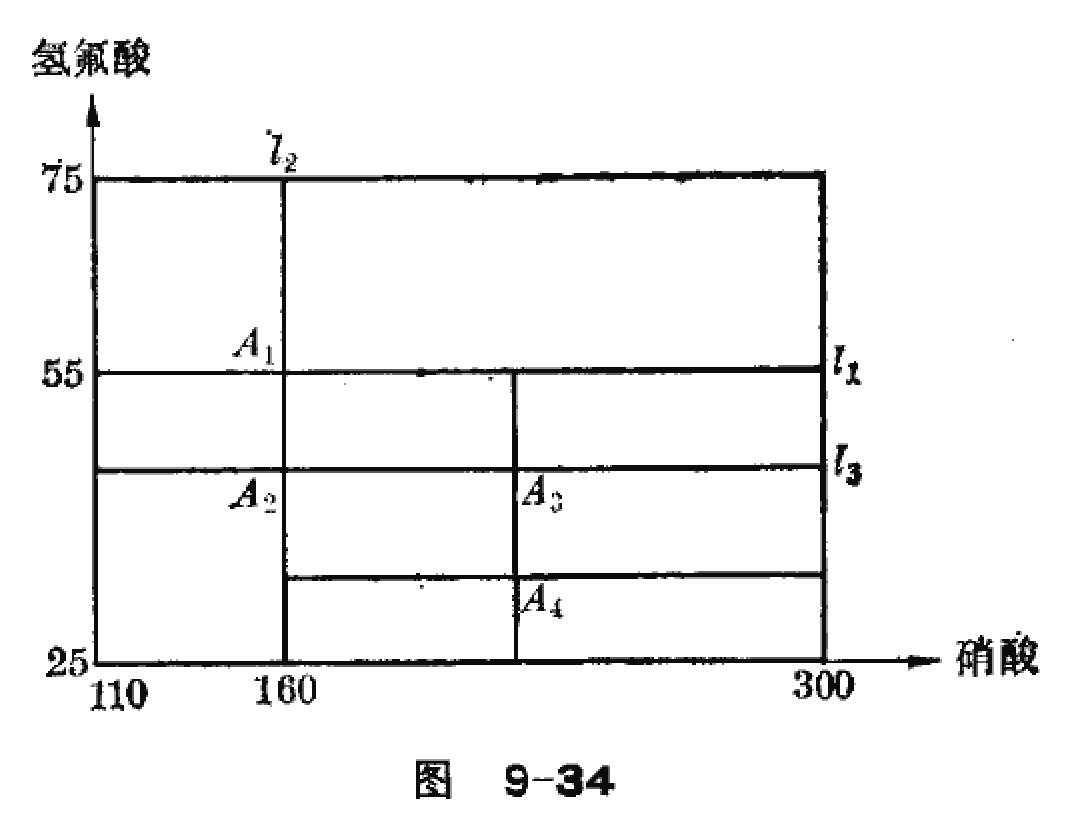


图 9-34

附录　习题答案

第一章

第一节

1. (1) $31°40'$;　(2) $9°12'$;　(3) $4°59'40''$;　(4) $5°10'$.
2. 依次构成的角度为 30°、60°、120°、150°; 30° 与 60° 互余, 30° 与 150°, 60° 与 120° 互补.
4. 30°.
5. 70°.
7. 长为 30 毫米, 宽 10 毫米.
8. 高度差为 0.7 米.
9. (1) 25.5 平方米;　(2) 2805 块砖.
10. 表面积为 1536 平方厘米, 容积为 4096 立方厘米.

第二章

第一节

1. 30°,　45°,　33°,　60°.
2. 75°,　105°.
4. 38°,　105°,　150°.
5. 135°.
6. $\angle A=\angle B=30°$,　$\angle ACB=120°$.
7. 45°,　45°,　90°.
10. 108°.
11. $\sqrt{10}$,　4,　$\sqrt{2}a$,　$\sqrt{a^2+b^2}$.
12. 227.33 米.
13. 71 厘米.
14. 1.13 米.

第 二 节

18. 6米.

19. (1) $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+h^2}$; (2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}h$; (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$; (4) $\sqrt{3}a$.

20. 40°.

第 三 节

5. 3.75厘米, 4.5厘米.
7. (1) 2.5厘米; (2) 7厘米.
10. 50毫米.
11. 2.5米.
12. 35米.
13. 河宽41.25米.
15. 7.6米.

复 习 题

6. 11厘米.
9. 9.35米.
10. 38.1米.
15. 35.94毫米.
16. 1.7米, 1.4米.

第 三 章

第 一 节

1. $\sin A=\frac{2}{3}$, $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin B=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos B=\frac{2}{3}$.
2. $\sin A=\frac{CD}{AC}=\frac{BC}{AB}$, $\cos A=\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$.

$\sin\angle DCB=\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{AB}$, $\cos\angle DCB=\frac{CD}{BC}=\frac{AC}{AB}$.

3. $\sin A=\frac{CD}{AC}$, $\sin\angle BCD=\frac{BD}{BC}$.

4. $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

5. (1) 0.35837, 0.59763, 0.79635;
   (2) 0.68666, 0.35837, 0.08600.

6. (1) 5°30′, 15°24′, 65°;
   (2) 89°47′, 54°2′, 31°4′.

7. 0.8, 0.8.

8. 67°23′.

9. (1) 22°37′; (2) 22.09; (3) 1.83; (4) 73°52′, 16°8′.

10. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{7}{4}$; (3) $2-\sqrt{3}$.

11. $\frac{8}{15}$, $\frac{15}{8}$.

12. (1) 0.36232, 1.0446, 4.1653;
    (2) 2.1171, 0.63789, 0.01687.

13. (1) 21°49′, 9°53′, 70°30′;
    (2) 17°24′, 63°36′.

14. (1) 10.839; (2) 18.979.

15. 34°51′, 63°26′, 10.745 米.

16. 25.3 毫米.

17. 1500 米, 2598 米.

18. 1433 米, 917.32 米.

19. 42.24 米.

20. 2.68 米, 612 张.

21. $\angle A=19°18'<21°$, 设计不合要求.

22. $BC=7.464$ 公里, $AC=7.727$ 公里.

23. (1) $\frac{12}{13}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{5}{12}$;
    (2) 0.714, 0.98, 1.02;

(3) $\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

第 二 节

1. (1) $\sqrt{6}$, 3.346;
   (2) 41°24′, 82°49′, 55°47′;
   (3) $c=\sqrt{67}=8.185$.
2. 1021.5米.
3. 293.6米.
4. 55毫米, 43.3毫米.
5. 96.5公斤, 21°17′.
6. $\alpha=113°35'$, 4.3分.

复 习 题

2. (1) 66°25′; (2) 36°52′.
3. $\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
5. 14′.
6. 49.56厘米, 1202平方厘米.
7. 6°.
8. 5°43′.
9. 3.85米.
10. 154.25.
11. 34.9米.
12. 68.6米, 17.2米.
13. 1341米, 1249米.
14. 136.6米.
15. 98.9米.
16. 240.7公斤, 106.3公斤.
17. F_1, F_3 夹角 $\alpha=128°26'$, F_2, F_3 夹角 $\beta=153°18'$.
18. (2) 68.41公斤, 119.2公斤.
19. 439.6公斤, 326.3公斤.

第 四 章

第 一 节

1．191.89 毫米.　　　　2．7.33 毫米.

4．10.23 毫米.　　　　6．90°，67.5°，22.5°.

7．$10\sqrt{3}$ 厘米，$75\sqrt{3}$ 平方厘米.

第 二 节

1．1，2，3.　　　　2．$2\sqrt{3}R$，$3\sqrt{3}R^2$.

5．260 厘米.

7．$\angle A=62°2'$，$\angle B=74°16'$，$\angle C=43°42'$.

8．(1) 56°54′；(2) 75.56 毫米.

第 三 节

(注：这里应用题中 π 均取值 3.14)

1．$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{27\pi}{36}$，$\frac{5\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{4}$，$\frac{4\pi}{3}$，$\frac{21\pi}{12}$.

2．68.755°，171.888°，36°，144°.

3．1.111 弧度 (63°39′21″).

4．314 毫米.　　　　5．7710 毫米.

6．$\frac{2\pi R}{3}$，$\frac{2\pi R}{5}$，$\frac{\pi R}{3}$.

第 四 节

1．706.5 平方米.　　　　2．44156.25 公斤.

3．471 平方毫米，245 平方毫米.

4．(1) 9.03 平方厘米；(2) $\pi(R^2-r^2)$.

5．$1.17R^2$.　　　　6．3.73 平方米.

7．439.6 平方厘米，$\frac{10\pi}{7}$ 弧度.

8. 18.84 平方米.　　9. $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2$.

10. 548.25 平方厘米.　　11. 18.73.

12. 80.42 克.　　13. 697 立方厘米.

14. 2.78 立方厘米.　　15. 0.0118 立方米.

16. 5.096×10^8 平方公里.

复　习　题

1. 31.85 米.　　2. 10.47 米.

3. 77.09 毫米.　　4. 14.46 毫米.

6. 80°8′.　　7. 14 厘米.

8. 20.7 毫米.　　9. 1099 平方厘米.

10. 341.8 毫米, 753.6 毫米, 2.2 弧度.

11. 12 厘米.　　12. 436.2 克.

13. 969 平方厘米.　　14. 1005 平方厘米.

第　五　章

第　一　节

2. (1) 3;　(2) $\sqrt{61}$;　(3) $4\sqrt{5}$;　(4) 10.

3. (16, 12),　(16, −12).

4. (1) $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$,　(0, 3),　$\left(-\frac{3}{2},\ -1\right)$.

5. (1) $\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{8}{3}\right)$;　(2) $\left(\frac{8}{3},\ 2\right)$.

6. $B(10, 7)$.

8. $M_1(4, -3)$; $M_2(1, -7)$.

第　二　节

3. $y=x$ 和 $y=-x$.

4. $y^2-6x+9=0$.

5．$16x-6y+5=0$.

6．$x^2+y^2=25$; $(2, 3)$ 和 $(-3, -2)$ 在圆内; $(0, 5)$和$(-3, -4)$在圆上; $(4, -4)$在圆外.

7．(1) $(x-2)^2+(y-3)^2=9$; (2) $(x-3)^2+(y-5)^2=9$;
(3) $(x+2)^2+(y-4)^2=9$.

8．(1) 圆心 $(6, -2)$，半径为 12; (2) 圆心 $(2, 1)$，半径为 3;
(3) 圆心 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，半径为 1.

9．$(x-1)^2+(y-2)^2=9$.

10．选取 M_1、M_2 的坐标为$(0, 0)$、$(a, 0)$时方程为 $\left(x+\frac{a}{k^2-1}\right)^2+y^2=\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}$; 圆.

11．$(x-3)^2+y^2=4$.

13．圆心 $(30, 0)$，半径为 50.

14．$A\left(\frac{130}{3}, \frac{20\sqrt{14}}{3}\right)$, $B\left(-\frac{130}{3}, \frac{20}{3}\sqrt{14}\right)$,
$C\left(-\frac{130}{3}, -\frac{20}{3}\sqrt{14}\right)$, $D\left(\frac{130}{3}, -\frac{20}{3}\sqrt{14}\right)$.

15．(1) $(x-2)^2+(y+3)^2=25$; (2) $(x-5)^2+(y-3)^2=25$;
(3) $x^2+y^2-5x-7y+6=0$.

第 三 节

1．(1) $y-5=2(x-3)$; (2) $y-3=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$;
(3) $y=\sqrt{3}x$; (4) $y=3x+5$;
(5) $y=\frac{2}{3}x-1$; (6) $y=-x+6$;
(7) $4x-5y-3=0$; (8) $4x+y-7=0$;
(9) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$; (10) $y=\frac{1}{2}x+2$.

2．(1) $k=\frac{1}{5}$, $b=\frac{2}{5}$; (2) $k=\frac{1}{4}$, $b=-1$;

(3) $k=\frac{3}{2}$, $b=0$; (4) $k=\frac{3}{2}$, $b=-3$;

(5) $k=-\frac{5}{4}$, $b=-5$.

4. (1) $y-5=2(x-3)$; (2) $y-2=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$;

(3) $\frac{y+3}{x-2}=\frac{7}{2}$.

第 四 节

1. (1) 平行; (2) 相交，交点$\left(\frac{5}{19}, \frac{1}{19}\right)$;

(3) 平行; (4) 垂直，交点$\left(-\frac{27}{10}, \frac{41}{10}\right)$;

(5) 垂直，交点$\left(-\frac{20}{17}, \frac{5}{17}\right)$;

(6) 垂直，交点$\left(\frac{9}{26}, -\frac{19}{26}\right)$;

(7) 垂直，交点$\left(\frac{29}{20}, -\frac{17}{20}\right)$;

(8) 垂直，交点$\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$;

(9) 相交，交点$\left(-\frac{1}{8}, \frac{19}{8}\right)$;

(10) 平行.

2. (1) $\varphi=\frac{\pi}{4}$，交点$\left(\frac{18}{5}, \frac{19}{5}\right)$;

(2) $\varphi=\frac{\pi}{2}$，交点$\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$;

(3) $\varphi=26°34'$，交点$\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.

3. l_1: $y+(8-5\sqrt{3})x-9+5\sqrt{3}=0$;
l_2: $y+(8+5\sqrt{3})x-9-5\sqrt{3}=0$.

4. (1) $y-4=-\frac{5}{4}(x+3)$; (2) $y+3=-\frac{3}{2}(x-4)$;

(3) $y=-\frac{1}{3}(x-1)$;　　(4) $y=-\frac{3}{2}x+3$;

(5) $y=3$.

5. $a=0$.

6. $(0, -8)$, $(0, 2)$.

8. (1) $(-8, 6)$, $(6, 8)$;　　(2) $(6, -8)$，为切线.

10. (1) $d=\frac{21}{5}$;　　(2) $d=\frac{98}{13}$;　　(3) $d=\sqrt{13}$.

11. (1) $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+10$ 和 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-10$;

(2) $y=x+5\sqrt{2}$ 和 $y=x-5\sqrt{2}$.

12. (1) 当 $k=\pm\frac{2}{\sqrt{21}}$ 时相切；(2) 当 $-\frac{2}{\sqrt{21}}<k<\frac{2}{\sqrt{21}}$ 时相交；

(3) 当 $k>\frac{2}{\sqrt{21}}$ 或 $k<-\frac{2}{\sqrt{21}}$ 时相离，

切点坐标为 $\left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\sqrt{21}\right)$ 或 $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{21}\right)$.

13. $Q(x=10.66, y=10.56)$.

14. $(x-1)^2+(y-4)^2=\frac{144}{25}$.

复　习　题

1. $A_1(a, 0)$;　$A_2\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$;　$A_3\left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$;

$A_4(-a, 0)$;　$A_5\left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$;　$A_6\left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$;

$B_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}\right)$;　$B_2(0, a)$;　$B_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}\right)$;

$B_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{a}{2}\right)$;　$B_5(0, -a)$;　$B_6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{a}{2}\right)$.

3. $M(-3.4, 0)$.

4. (2, -7).

5. (4, 1).

6. 1.25 (小时).

7. (1) $x+y-1=0$; (2) $x+y-\frac{6}{7}=0$; (3) $x+5y-7=0$;

(4) $5x-4y-14=0$.

8. (1) $S=20$; (2) $a=\sqrt{116}$.

9. 圆 $x^2+y^2-1=0$ 和 y 轴.

10. $x^2+y^2-12x=0$.

11. $x^2+y^2=a^2$.

12. $\left(x-\frac{a+2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=1$.

13. $P(1, 1)$.

14. $47x+80y+372=0$.

15. l_1: $3x-4y-7=0$; l_2: $5x+12y-49=0$.

16. l_1: $3x-3y+19=0$; l_2: $3x+3y-5=0$.

17. (1) AA': $x-5y+9=0$; BB': $x+y-5=0$;

CC': $5x-y-11=0$.

(2) 圆心$\left(\frac{11}{4}, \frac{9}{4}\right)$, 半径为$\frac{5}{4}\sqrt{2}$.

(3) $x-3y+5=0$; (4) $3x+y-5=0$; (5) $S_{\triangle}=4$;

(6) $\angle A=63°26'$; $\angle B=53°8'$; $\angle C=63°26'$.

18. 提示: 取坐标系, 使三角形三顶点坐标分别为 $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$, 则 y 轴即为 AB 边的高.

19. $16x^2-8xy+y^2+6x+24y-9=0$.

20. 提示: 取坐标系, 使等腰三角形的顶点在 y 轴上, 底边在 x 轴上.

第 六 章

第 一 节

1. (1) $x^2=12(y-1)$; (2) $y^2=12(x-1)$;

(3) $(x-2)^2=-4(y+5)$; (4) $(y+3)^2=-3(2x+1)$.

2. (1) $\left(0,\ \frac{5}{12}\right)$; (2) $\left(0,\ -\frac{3}{20}\right)$;

(3) $\left(-\frac{3}{20},\ 0\right)$; (4) $\left(0,\ -\frac{5}{12}\right)$.

5. (1) $y^2=4x$; (2) $x^2=4y$.

6. $y=2(x+1)$.

7. $x+y+1=0$ 和 $x-y-1=0$.

8. 装在 (15, 0) 处.

9. $y+2=\frac{1}{16}(x-1)^2$.

10. $x-3=-\frac{1}{12}(y-2)^2$.

12. $y=\frac{7}{90}x^2$.

13. 装在对称轴上距顶点 40 厘米处.

14. $y=x^2-2x+5$.

15. $x=-2y^2-4y-5$.

第　二　节

1. 取长轴在 x 轴上, 方程: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

3. $\frac{x^2}{25^2}+\frac{y^2}{15^2}=1$.

4. $\frac{x^2}{7424^2}+\frac{y^2}{7384^2}=1$.

5. $\frac{x^2}{3.525^2}+\frac{y^2}{2.875^2}=1$.

7. $\frac{(x-\sqrt{5})^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

8. 提示: 化(1)为 $\frac{(x+1)^2}{1}+\frac{(y-2)^2}{\frac{1}{2}}=1$, 再作图;

化(2)为 $\frac{(x+2)^2}{7}+\frac{(y-1)^2}{2}=1$, 再作图.

第 三 节

2．(1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{13}=1$;

(2) $-\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{25}=1$.

3．$r=\sqrt{134.79+\left(\frac{h}{2}-21.64\right)^2}$.

4．$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

5．$\frac{(x+3)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$.

复 习 题

2．$\left(\frac{5}{4},\ \sqrt{15}\right)$, $\left(\frac{5}{4},\ -\sqrt{15}\right)$.

3．$PQ=4.875$ (米).

4．取炮位为原点，得方程为 $y=-\frac{1}{125}x^2+\frac{2}{25}x$. 又距炮位 2 公里处炮弹高度为 0.128 公里.

5．当 $|k|<2$ 时相交，当 $|k|\geqslant 2$ 时不相交，不可能相切.

6．当 $\alpha=\pm\frac{\pi}{4}$ 时相切，切点为 $(-1, 2)$ 及 $(-1, -2)$.

7．方程：$y=\frac{x}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}$， 切点：$(3, 2\sqrt{3})$.

8．提示：在 l 下方距离为 a 处引平行线 s，则点 M 到点 A 的距离等于到直线 s 的距离.

9．(1) 椭圆：顶点为 $(3, -1)$, $(3, 1)$, $\left(3-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\left(3+\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$,

焦点为 $\left(3, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(3, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

(2) 抛物线：顶点为 $(-5, 0)$，焦点为 $(-4, 0)$;

(3) 双曲线：顶点为$\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 3\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 3\right)$, 焦点为$\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, 3\right)$, $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, 3\right)$, 渐近线为 $y-3=\pm x$;

(4) 双曲线：顶点为 $(0, -c-a)$, $(0, -c+a)$, 焦点为

$$(0, -c-\sqrt{a^2+b^2}), (0, -c+\sqrt{a^2+b^2}),$$

渐近线为 $y+c=\pm\frac{a}{b}x$;

(5) 当 $\alpha=0$ 时，方程表示二平行直线 $y=\pm 1$;

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，方程表示二平行直线 $x=\pm 1$;

当 $\alpha=\pi$ 时，方程不表示任何曲线；

当 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，方程表示椭圆，其顶点为

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}}, 0\right), \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}}, 0\right),$$

$$\left(0, -\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}}\right), \qquad \left(0, \frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}}\right),$$

焦点为

$$\begin{cases} \left(-\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}}, 0\right), \quad \left(\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}}, 0\right); \\ \qquad \text{当 } 0<\alpha<\frac{\pi}{4} \text{ 时}; \\ \left(0, -\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}}\right), \quad \left(0, \sqrt{\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}}\right); \\ \qquad \text{当 } \frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2} \text{ 时}. \end{cases}$$

当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，方程表示圆心为$(0, 0)$，半径等于$\sqrt[4]{2}$的圆；

当 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 时，方程表示双曲线，其顶点为

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}}, 0\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}}, 0\right),$$

焦点为

$$\left(-\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}},\ 0\right),\quad \left(\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}},\ 0\right),$$

渐近线为 $y=\pm\sqrt{\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}}x$.

10．(1) 当 $E\neq0$ 时，是抛物线；当 $E=0$ 时，是两平行直线；

(2) 当 $AC<0$ 时：

(i) 如 $F\neq0$，方程表示双曲线；

(ii) 如 $F=0$，方程表示两相交直线.

当 $AC>0$ 时：

(i) 如 F 与 A、C 异号，则方程表示椭圆（当 $A=C$ 时为圆）；

(ii) 如 F 与 A、C 同号，则方程不表示任何曲线；

(iii) 如 $F=0$，则方程表示原点 $(0, 0)$；

(3) 方程可化为

$$A\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{C}\right)^2+F-\frac{D^2}{A}-\frac{E^2}{C}=0,$$

讨论与(2)类似.

11．$x^2=12y$.

14．(1) 当 $k<4$ 时是椭圆，当 $4<k<9$ 时是双曲线；

(2) 焦点是 $(-\sqrt{5},\ 0)$ 和 $(\sqrt{5},\ 0)$.

第 七 章

第 一 节

3．(1) $r=\frac{9}{2\pi}\theta$.

4．(1) $r=2R\sin\theta$;　(2) $r=-2R\cos\theta$;　(3) $r=-2R\sin\theta$.

5．(1) $r=\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}$;　(2) $r=\frac{3\sqrt{3}}{2\sin\theta}$.

6．$r_1=a\cos\theta$，这是以 $\frac{a}{2}$ 为半径、$\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$ 为圆心的圆周.

7. $M_1(1,\ \sqrt{3})$; $M_2\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3},\ -\frac{3}{2}\right)$; $M_3(0,\ -1)$;

$M_4\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3},\ \frac{3}{2}\right)$; $M_5(2,\ -2\sqrt{3})$.

8. $M_1(\sqrt{5},\ \operatorname{arctg} 2)$; $M_2\left(10,\ \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$; $M_3(\sqrt{5},\ \pi+\operatorname{arctg} 2)$;

$M_4(\sqrt{10},\ \pi-\operatorname{arctg} 3)$; $M_5\left(\sqrt{5},\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

9. (1) $\theta=\frac{\pi}{3}$; (2) $r^2\sin 2\theta=1$; (3) $r^2\cos 2\theta=a^2$;

(4) $r=-6\sin\theta$; (5) $r=2a(1-\cos\theta)$.

10. (1) $x=2$; (2) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2=\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2$;

(3) $x-2y-1=0$; (4) $(x^2+y^2)^2-2xy=0$.

12. (1) $v_1=\frac{2k\omega}{3\pi}$, $v_2=-\frac{2k\omega}{\pi}$;

(2) $\widehat{ACB}$: $r=R+\frac{2k}{3\pi}\theta$, $\widehat{BA}$: $r=R+4k-\frac{2k}{\pi}\theta$.

第 二 节

1. (2) $y=1+2x^2$ 是一条抛物线.

2. $y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$.

3. (1) $\begin{cases}x=5\cos\theta,\\ y=5\sin\theta;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=5\cos\theta,\\ y=3\sin\theta;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=x_0+R\cos\theta,\\ y=y_0+R\sin\theta;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=x_0+a\cos\theta,\\ y=y_0+b\sin\theta.\end{cases}$

5. $x=R(\cos t+t\sin t)$, $y=R(\sin t-t\cos t)$.

6. $x=R\cos\varphi$, $y=\frac{R}{2}\sin\varphi$.

复 习 题

1. $r=R+\frac{H}{\pi}\theta$ 和 $r=R+2H-\frac{H}{\pi}\theta$.

2. $r=\frac{9}{2}+\frac{30}{\pi}\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{60}$;

$r=\frac{5}{13}\left(\frac{77}{6}+\frac{10}{\pi}\theta\right)$, $\frac{\pi}{60}\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}$;

$r=\frac{15}{2}$, $\frac{2\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\pi$;

$r=\frac{33}{2}-\frac{9}{\pi}\theta$, $\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{4\pi}{3}$;

$r=\frac{9}{2}$, $\frac{4\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

3. $r=20+\frac{5}{2\pi}\theta$.

4. 直线方程为 $\cos\theta_0 x+\sin\theta_0 y=p$ 或 $y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\theta_0\right)x+\frac{p}{\cos\theta_0}$, 与极轴的交角为 $\frac{\pi}{2}+\theta_0$, 与极点的距离为 p.

5. $r=a(1+\cos\theta)$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

6. $x=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\cos\varphi$, $y=2+\frac{5}{2}\sin\varphi$.

7. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 是一双曲线方程.

8. (1) $\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$; (2) $\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$;

(3) 曲线方程为 $y=\sqrt{3}x-\frac{2g}{v_0^2}x^2$, 射程为 $\frac{\sqrt{3}v_0^2}{2g}$.

9. $$\begin{cases} x=(R+r)\cos\theta-r\cos\left(1+\frac{R}{r}\right)\theta, \\ y=(R+r)\sin\theta-r\sin\left(1+\frac{R}{r}\right)\theta. \end{cases}$$

第 八 章

1. $A(7, -11)$; $B(11, -5)$; $C(0, 0)$; $D(4, -13)$.

2. (1) $A(-3, -2)$, $B(5, 1)$;

   (2) $A(3, 2)$, $B(-5, -1)$;

   (3) $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, $B(2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$;

   (4) $A\left(\frac{2-3\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}-3}{2}\right)$, $B\left(\frac{-1+5\sqrt{3}}{2}, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. (1) $x'=-\frac{1}{8}y'^2$;

   (2) $\frac{x'^2}{\frac{11}{6}}+\frac{y'^2}{\frac{11}{4}}=1$;

   (3) $y'=-3x'^2$;

   (4) $\frac{x'^2}{\frac{9}{2}}-\frac{y'^2}{\frac{9}{4}}=1$.

4. (1) $x'=\sqrt{6}$, $x'=-\sqrt{6}$;

   (2) $x'^2-y'^2=2$;

   (3) $\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{9}=1$;

   (4) $y'=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'^2$.

5. (1) $\frac{x'^2}{30}+\frac{y'^2}{5}=1$; (2) $-\frac{x'^2}{36}+\frac{y'^2}{9}=1$; (3) $y'^2=4x'$.

6. (1) 双曲型; (2) 椭圆型; (3) 抛物型; (4) 椭圆型.

7. $25x^2+16y^2+100x-96y-1356=0$.

8. $cx+d=0$; $cy-a=0$.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝几何
作者＝《初等数学》编写组
页数＝３２８
ＳＳ号＝１００６８５２０
出版日期＝１９７３年０９月第１版